MESSUNG DER KOHÄRENZLÄNGE VON ELEKTRONEN IM ELEKTRONENINTERFEROMETER MIT WIEN-FILTER

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard - Karls - Universität
zu Tübingen

vorgelegt von
Gerhard Wohland
aus Plochingen

1981

MESSUNG DER KOHÄRENZLÄNGE VON ELEKTRONEN IM ELEKTRONENINTERFEROMETER MIT WIEN-FILTER

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard - Karls - Universität
zu Tübingen

vorgelegt von
Gerhard Wohland
aus Plochingen

1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung	:	27.11.1981
Dekan	:	Prof.Dr.M.Grewing
1. Berichterstatter	:	Prof. Dr. G. Möllenstedt
2. Berichterstatter	:	Prof. Dr. F. Lenz

Abstract

WOHLAND, GERHARD:

MESSUNG DER KOHÄRENZLÄNGE VON ELEKTRONEN IM ELEKTRONEN-INTERFEROMETER MIT WIEN - FILTER

Durchlaufen die kohärenten Teilstrahlen eines Elektronen-Interferometers ein Wien-Filter bevor sie interferieren, so verschwindet von einer bestimmten Anspannung des Filters an der Kontrast der Interferenzstreifen.

Das Wien-Filter ist eine Kombination von elektrischem und magnetischem Feld, wobei Richtung und Betrag der Felder so gewählt sind, daß die Kräfte auf die bewegten Elektronen einander aufheben.

Die konstrastmindernde Wirkung des Wien-Filters wird von zwei Ansätzen her zunächst theoretisch untersucht. Das gemeinsame Ergebnis beider Ansätze ist eine Funktion, die den Zusammenhang beschreibt, zwischen der elektrischen Feldstärke im Filter und dem von ihm erzeugten axialen Abstand der kohärenten Wellenpakete. Dadurch ist über die Spannung am Wien-Filter der axiale Abstand der Wellenpakete nach dem Filter meßbar. Bei derjenigen Spannung, bei der der Kontrast gerade verschwindet, ist dieser Abstand etwa gleich der Kohärenzlänge der Elektronen. Die Kohärenzlänge ist somit direkt meßbar.

Die Parameter der Funktion werden mit zwei Methoden bestimmt. Die Fehlererwartung für die Messung der Kohärenzlänge liegt für die erste Methode bei 40 %, für die zweite bei 15 %. In beiden Fällen ist ein Fehleranteil von 10 % enthalten, der sich aus der noch notwendigen subjektiven Beurteilung des Kontrastes ergibt.

Im Mittel werden für die verwendeten 5kV-Elektronen eine Kohärenzlänge von 0,13 um gemessen; die Streuung der Meßwerte beträgt o,02 um.

Zur weiteren theoretischen Absicherung der experimentellen Meßergebnisse wird gezeigt, daß der chromatische Fehler der verwendeten elektrostatischen Linsen die Kohärenzlänge vor der Messung zwar verkürzt, gleichzeitig wird jedoch nachgewiesen, daß mit dem hier verwendeten Meßverfahren trotzdem die ursprüngliche, durch die Linsen unbeeinflußte Kohärenzlänge gemessen wird.

Kann die subjektive Beurteilung des Konstrastes durch ein objektives Meßverfahren ersetzt werden, so wäre es möglich, den bisher nicht zugänglichen gesamten Kontrastverlauf eines Elektronen-Interferenzfeldes zu vermessen. Dies könnte die Fourier-Spektroskopie mit Elektronen möglich machen.

EINLEITUNG

I EXPERIMENTELLER AUFBAU

I-0 ALLGEMEINER AUFBAU

1. Gehäuse
2. Vakuum
3. Magnetische Störfelder
4. Linsen
5. Strahlengang
6. Geometrische Daten des Strahlengangs

I-1 REELLE QUELLEN (Funktionseinheit I)

1. Bestrahlungssystem
2. Biprisma
3. Abbildungslinse L_{II}
4. Koordinaten x_Q, y_Q der reellen Quellen

I-2 WIEN-FILTER (Funktionseinheit II)

1. Realisierung
2. Mechanische und elektrische Daten

I-3 BEOBACHTUNG (Funktionseinheit III)

1. Linsen
2. Bildverstärker
3. Dokumentation

II EINFLUSS DER LINSE L_{II} AUF DIE BIPRISMAINTERFERENZEN

II-1 INTENSITÄTSVERTEILUNG IN DER INTERFERENZEBENE

1. Ohne Linse
2. Abbildung des Interferenzfeldes mit L_{II}
3. Laterale Ausdehnung und Spektrum der Quelle
4. Intensitätsverteilung der Interferenz bei "realer" Quelle
   - Mittelung über den Ort ξ
   - Abhängigkeit des Streifenabstandes s von der Wellenzahl k
   - Mittelung über die Wellenzahl k
5. Kontrast, Längen- und Winkelkohärenz

II-2 ZAHL DER INTERFERENZSTREIFEN

1. Mit Linse
2. Ohne Linse
3. Verkürzung der Wellenpakete durch L_{II}

III OPTIK DES WIEN-FILTERS

III-0 VORBEMERKUNG

III-1 ENTSPANNTES WIEN-FILTER

1. Strahlengang
2. Konvergenzwinkel, Streifenabstand, mittlerer Bündelabstand bei entspanntem Filter

III-2 ANGESPANNTES WIEN-FILTER

1. Strahlengang
2. Bahngleichungen im Filter
   - Wien-Bedingung
3. Linsenwirkung des Wien-Filters
   - Brennweite
4. Konvergenzwinkel, Streifenabstand, mittlerer Bündelabstand bei angespanntem Filter
5. Krümmung der Interferenzstreifen

IV KONSTRASTMINDERUNG DURCH WIEN-FILTER

IV-0 BESCHREIBUNG, DOKUMENTATION

1. Ablauf des Experimentes
2. Vorversuche

IV-1 ABSTAND DER WELLENPAKETE (1. Erklärung)

1. Gleiche elektronenoptische Weglängen
2. Differenz der Gruppengeschwindigkeiten
3. Längenkohärenzbedingung mit Filter
   (über Paketabstand)
4. Möglichkeiten zur Messung des Paketabstandes

IV-2 DISPERSION DES WIEN-FILTERS (2. Erklärung)

1. Längenkohärenz und Streifenkontrast mit Wien-Filter
2. Kein Einfluß der Linse L_{II}
3. Längenkohärenzbedingung mit Wien-Filter
   (über Dispersion)
4. Anschauliche Wirkung des Wien-Filters

V MESSUNG DER KOHÄRENZLÄNGE

V-0 VORBEMERKUNG

V-1 KOHÄRENZLÄNGE ÜBER GEOMETRIE DES STRAHLENGANGES

1. Messvorgang
2. Formeln und zu messende Größen
   (Zusammenstellung)
3. Fehlerabschätzung
4. Messergebnisse
   - Erläuterungen der Messtabellen
   - Messtabellen A, B, C

V-2 KOHÄRENZLÄNGE ÜBER STREIFENEMPFINDLICHKEIT

1. Bestimmung der Koeffizienten und aus der
   Streifenempfindlichkeit
2. Messung der Streifenempfindlichkeit
3. Messprobleme, Fehlerabschätzung
4. Messergebnisse
   - Erläuterung der Messtabelle
   - Messtabelle D

ZUSAMMENFASSUNG

EINLEITUNG

Durchlaufen die kohärenten Teilstrahlen eines Elektronen-Interferometers (Möllenstedt und Düker, 1956) ein Wien-Filter, bevor sie interferieren, so verschwindet von einer bestimmten Anspannung des Wien-Filters an der Kontrast der Interferenzstreifen (Möllenstedt und Wohland, 1980).

In der vorliegenden Arbeit wird diese Wirkung des Wien-Filters näher untersucht und daraus ein Verfahren abgeleitet, mit dem die Kohärenzlänge von Elektronen gemessen werden kann.

In solch einem Filter sind die Elektronen statischen homogenen elektrischen und magnetischen Feldern ausgesetzt. Die beiden Feldanteile stehen aufeinander und auf der optischen Achse senkrecht, wobei das Magnetfeld parallel zu den Interferenzstreifen verläuft. Das Verhältnis der Feldstärken ist so gewählt, daß die Kräfte auf die Elektronen einander aufheben (Wien-Bedingung).

Es werden zwei Erklärungsansätze für die kontrastmindernde Wirkung des Wien-Filters angegeben.

Die erste Erklärung geht aus von der Tatsache, daß die zwei Teilstrahlen, die in der Beobachtungsebene einander überlagern, im Wien-Filter einen lateralen Abstand voneinander haben. Sie bewegen sich deshalb auf verschiedenen elektrischen Potentialen und daher mit verschiedenen Gruppengeschwindigkeiten durch das Filter. Infolge dieser Geschwindigkeitsdifferenz sind die Wellenpakete nach Durchgang durch das Filter in axialer Richtung gegeneinander verschoben. Dieser vom Filter erzeugte Paketabstand verringert den Kontrast des Interferenzfeldes. Daß sich beim Anspannen des Filters zwar die Wellenpakete gegeneinander verschieben, die Interferenzstreifen jedoch zumindest im Beobachtungsbereich ortsfest bleiben, erklärt sich aus der entgegengesetzten Gleichheit der magnetischen und elektrischen Phasenschiebung im Filter.

Eine formal andere zweite Erklärung desselben Sachverhaltes stützt sich auf die Tatsache, daß im abgeglichenen Filter zwar die Ablenkungen der Felder einander aufheben, daß aber die Abhängigkeit dieser Ablenkung von der Wellenzahl (Dispersion) im elektrischen Feld eine andere ist als im magnetischen. Die Abweichung vom Mittelwert der Intensitätsverteilung des Interferenzfeldes läßt sich in zwei Faktoren zerlegen, einen rasch mit der lateralen Koordinate veränderlichen "Phasenfaktor", der die Lage der Interferenzmaxima beschreibt, und einen nur langsam veränderlichen "Amplitudenfaktor", der ein Maß für den Kontrastverlauf im Interferenzfeld ist. Wird das Wien-Filter unter Einhaltung der Wien-Bedingung angespannt, so zeigt sich, daß der Phasenfaktor und damit die Lage der Interferenzstreifen unverändert bleibt, während sich das Maximum des Amplitudenfaktors, welches gleich dem Kontrastmaximum ist, infolge der Dispersion des Filters in lateraler Richtung verschiebt.

Das gemeinsame Ergebnis beider Ansätze ist eine Funktion, die die Abhängigkeit des vom Wien-Filter erzeugten Paketabstandes von der Wien-Spannung beschreibt. Die Parameter dieser Funktion werden für mehrere Einstellungen des Interferometers auf zwei Arten bestimmt.

Erstens werden die Parameter aus den geometrischen Daten des Strahlengangs bestimmt; diese Methode ist mit einer großen Fehlererwartung behaftet.

Zweitens werden die Parameter einer Funktion bestimmt, die angibt, wieviel Streifen pro Spannungsänderung am Wien-Filter durch das Beobachtungsfeld wandert. Aus dieser Messung ergeben sich für eine gewählte Einstellung des Interferometers die notwendigen Parameter. Diese zweite Methode ist genauer als die erste.

Die mit beiden Methoden gewonnenen Meßergebnisse für die Kohärenzlänge werden diskutiert und in Tabellen zusammengestellt.

I EXPERIMENTELLER AUFBAU

I-0 ALLGEMEINER AUFBAU

1. Gehäuse
2. Vakuum
3. Magnetische Störfelder
4. Linsen
5. Strahlengang
6. Geometrische Daten des Strahlengangs

I-1 REELLE QUELLEN (Funktionseinheit I)

1. Bestrahlungssystem
2. Biprisma
3. Abbildungslinse L_{II}
4. Koordinaten x_Q, y_Q der reellen Quellen

I-2 WIEN-FILTER (Funktionseinheit II)

1. Realisierung
2. Mechanische und elektrische Daten

I-3 BEOBACHTUNG (Funktionseinheit III)

1. Linsen
2. Bildverstärker
3. Dokumentation

1-0 ALLGEMEINER AUFBAU

1. Gehäuse

Der experimentelle Aufbau ist in einer aus einzelnen zylindrischen Bauteilen aufgebauten Stahlsäule untergebracht. Ihre Höhe beträgt etwa 170 cm. Die Säulenteile sind zusammengeklammert und durch eine Hebebühne an jeder Stelle zu trennen. Die Zeit für Reparaturen und Umbauten wird dadurch wesentlich verkürzt.

2. Vakuum

Die Säule wird von einer Öldiffusionspumpe (Balzers DIFF 650) auf einen Druck von ca. $5 \cdot 10^{-4}$ Pa evakuiert, was auch zum Betrieb des verwendeten Bildverstärkers (siehe I-3/2.) ausreicht.

3. Magnetische Störfelder

Besondere Maßnahmen zur Abschirmung magnetischer Störfelder aus dem Stromversorgungsnetz sind nicht vorgenommen, da für die Experimente die Beobachtung einer nur geringen Streifenzahl ausreicht.

4. Linsen

Alle verwendeten Linsen sind elektrostatisch. Ihre Spannungen werden über einen 50-stufigen Hochspannungsteiler aus der Kathodenspannung erzeugt. Aus Intensitätsgründen werden Zylinderlinsen verwendet (Düker, 1955).

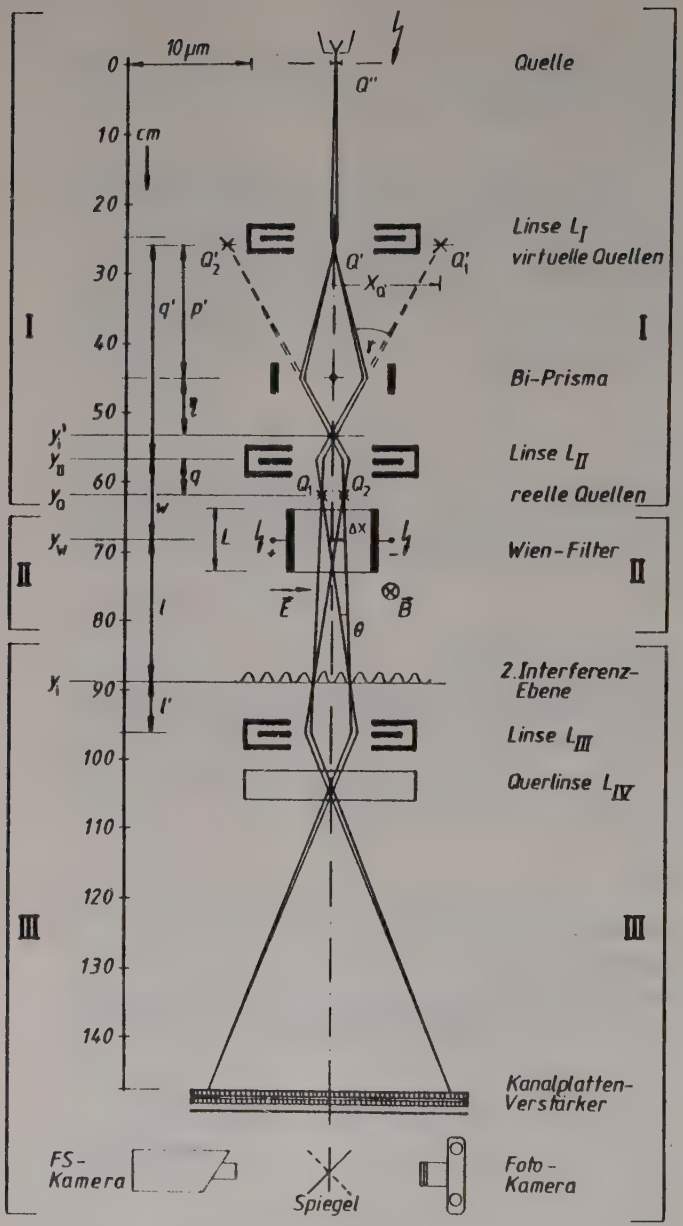


Fig.: I/1 Gesamtstrahlengang des Experimentes

Die drei Funktionseinheiten des Interferometers:

I: Erzeugung der reellen Quellen Q_1, Q_2
II: Wien-Filter
III: Vergrößerung, Beobachtung, Dokumentation

(im experimentellen Betrieb ist $1' \ll 1$)

I-0

5. Strahlengang

Die folgenden Ausführungen stützen sich auf die Figur I/1.

Der engste Querschnitt Q'' des Strahlerzeugungssystems wird von der Linse L_I zu einer strichförmigen Sonde Q' verkleinert. Das Biprisma erzeugt daraus durch Ablenkung um den Winkel γ die beiden virtuellen Quellen Q_2' und Q_1'. Ihr Abstand voneinander ist $2|x_{Q'}|$. Die Linse L_{II} bildet die beiden virtuellen Quellen vor den Eingang des Wien-Filters ab. Die reellen Bilder Q_1, Q_2 sind zwei kohärente Elektronenquellen, deren Strahlen einander hinter dem Wien-Filter in der 2. Interferenzebene überlagern. Diese Ebene wird von der Linse L_{III} in die Ebene des Bildverstärkers abgebildet. Der Durchsicht-Leuchtschirm des Verstärkers kann über einen Spiegel wahlweise mit einer Fernsehkamera beobachtet oder fotografiert werden.

6. Die geometrischen Daten des Strahlenganges

Abstände:

Linse L_I	- Biprisma	: $p' = (20{,}1 \pm 0{,}05)$ cm
Linse L_I	- Linse L_{II}	: $q' = (32{,}1 \pm 0{,}05)$ cm
Linse L_{II}	- Wien-Filter	: $w = (11{,}7 \pm 0{,}05)$ cm
Wien-Filter	- Linse L_{III}	: $l = (27{,}9 \pm 0{,}05)$ cm

Es wird angenommen, daß die optischen Hauptebenen praktisch mit den mechanischen Symmetrieebenen der symmetrischen Linsen zusammenfallen, was für schwache Linsen eine gute Näherung ist (Heise und Rang, 1948). Die Verkleinerungslinse L_I und die Vergrößerungslinse L_{III} sind Dreielektroden-Einzellinsen, deren Mittelelektrode auf Kathodenpotential liegt. Sie haben eine Brennweite von ca. 1 mm. Die entsprechenden Bildweiten wurden deshalb gegenüber den Gegenstandsweiten vernachlässigt.

I-1 REELLE QUELLEN (Funktionseinheit I)

Die Funktionseinheit I besteht nach Fig.: I/1 aus dem Bestrahlungssystem (Quelle Q''), der Verkleinerungslinse L_I, dem Biprisma und der Linse L_{II}, die vor dem Eingang des Wien-Filters zwei reelle kohärente Elektronenquellen erzeugt.

1. Bestrahlungssystem

Hochspannung:

Hochspannungskaskade: CPS INC, USA; Typ: 6002
integrierte Versorgung für Wehneltspannung und Heizstrom

Wechselspannungsanteil: $130\ mV_{eff}$
(mit kapazitivem Teiler gemessen)

Hochspannungsteiler:
50 Abgriffe für die elektrostatischen Linsen, jede Stufe mit elektrostatischem Voltmesser vermessen.

Gesamtwiderstand: 787 MΩ

Elektronenquelle Q'':

Strahlkopf: EM 9; Carl Zeiss
mit Spitzenkathode und einem während des Betriebes justierbaren Wehneltzylinder
engster Strahlenquerschnitt: $\sigma \approx 1\mu m$

Verkleinerungslinse L_I:

Brennweite $f_I \approx 1$ mm
verkleinert Q'' zu einer strichförmigen

Quelle Q':

Breite: $\Delta\varepsilon \approx 10$ nm

2. Biprisma

Das elektrostatische Biprisma erzeugt aus der Quelle Q' zwei virtuelle Quellen Q_1' und Q_2'.

Aufbau: nach Möllenstedt und Düker (1956):

Fadenradius : $r = (0{,}7 \pm 0{,}3)\ \mu m$

Abstand der Erdbacken : $2R = (4 \pm 0{,}05)$ mm

Fadenlänge : 12 mm

(1-1) Umlenkwinkel : $\gamma' = \gamma_0' \frac{U_F}{U_B}$

(1-2) Umlenkkonstante : $\gamma_0' = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\ln R/r_0}$.

hier: $\gamma_0' = 0{,}197 \pm 0{,}01$

Die Umlenkkonstante γ_0' wurde nach (1-2) abgeschätzt. Der Radius r_0 des bei der jeweiligen Messung benutzten Fadens konnte nicht bestimmt werden, da meist solange gemessen wurde, wie es die Lebensdauer des Fadens zuließ. Der angegebene Wert von r_0 ist ein Durchschnittswert. Er ergab sich aus Messungen mit dem Rasterelektronenmikroskop an mehreren Fäden. Der Abstand der Erdbacken 2R wurde mit einem Meßmikroskop bestimmt.

3. Abbildungslinse L_{II}

Die schwach angespannte Linse L_{II} (Brennweite 3-4 cm) bildet die vom Biprisma erzeugten virtuellen Quellen Q_1' und Q_2' vor den Eingang des Wien-Filters ab. Um die Lage ihrer Bilder Q_1 und Q_2 berechnen zu können, wird außer den in Tabelle I-0/6 aufgeführten Werten die Brennweite f_{II} der Linse L_{II} benötigt. f_{II} wurde nach dem Verfahren von Heise und Rang (1948) als Funktion der Linsenanspannung U_{II}/U_B vermessen.

I-1 Fig. I/2 zeigt die gemessenen Werte und die gerechnete Ausgleichskurve.

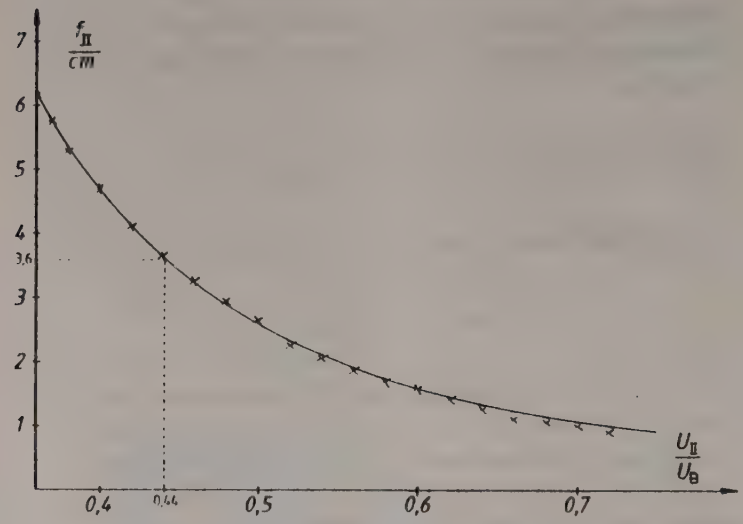


Fig.: I/2 Die Brennweite f_{II} der Linse L_{II}
Die Rechnung für die Ausgleichskurve ergab

$$f_{II} \sim U_B^{2,7} \sim k^{5,4}$$

k : Wellenzahl
U_B : Beschleunigungsspannung
U_{II}: Linsenspannung

Die Brennweiten wurden nach dem Verfahren von Heise und Rang (1948) ermittelt.

I-1 4. Koordinaten x_Q, y_Q der reellen Quellen

Nach Fig.: I/1 ergibt sich für die Koordinaten der virtuellen Quellen Q_1' und Q_2'

(1-3) $x_{Q_1'} = -x_{Q_2'} = \gamma p'$,

$y_{Q_1'} = y_{Q_2'} = y_{II} - q'$,

I-1 wobei y_{II} die y-Koordinate der Mittelebene der Linse L_{II} ist.

Mit der hier gültigen paraxialen Abbildungsgleichung für schwache Linsen gilt für die Ebene der reellen Quellen:

$$(1\text{-}4)\quad y_Q \simeq y_{Q_1} = y_{Q_2} = y_{\underline{II}} + q = y_{\underline{I}} + q' \frac{f_{\underline{II}}}{q' - f_{\underline{II}}} \quad ;$$

und für die Koordinaten x_{Q_1} und x_{Q_2}:

$$(1\text{-}5)\quad X_Q \simeq X_{Q_1} = -X_{Q_2} = -\gamma\rho' \frac{f_{\underline{I}}}{q' - f_{\underline{II}}} \quad .$$

I-2 DAS WIEN-FILTER (Funktionseinheit II)

1. Realisierung des Wien-Filters

Das hier beschriebene Wien-Filter wurde nach Veröffentlichungen (Boersch, Geiger, Stickel, 1964) und Erläuterungen von J. Geiger gebaut.

Fig. I/2 zeigt schematisch den grundsätzlichen Aufbau des Wien-Filters.

Die Anordnung erzeugt ein elektrisches und ein magnetisches Feld, die zueinander und zur optischen Achse senkrecht orientiert sind. Die Richtung des Magnetfeldes stimmt mit der Richtung der Interferenzstreifen überein.

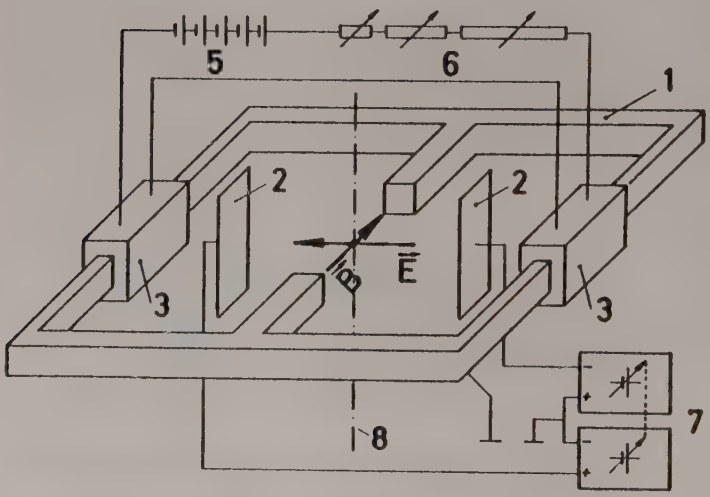


Fig.: I/3 Schematischer Aufbau des Wien-Filters

1: Ringmagmet
2: Kondensatorplatten
3: Magnetspulen
5: Stromversorgung
6: Vorwiderstände
7: Spannungsversorgung
8: Optische Achse
$\vec{B}$: Magnetische Induktion
$\vec{E}$: elektrische Feldstärke

I-2 Das Magnetfeld wird von einem Ringkern 1 aus Reineisen erzeugt, auf den zwei gegeneinander geschaltete Spulen 3 gewickelt sind. Der Spulenstrom und damit die magnetische Feldstärke ist über eine Reihe von Vorwiderständen 6 verschieden fein zu regeln.

Das elektrische Feld liegt zwischen den Kondensatorplatten 2. Die Spannungsversorgung 7 für die Platten 2 ist symmetrisch zum geerdeten Potential des Vakuumgehäuses, so daß bei jeder eingestellten Feldstärke das elektrische Potential auf der optischen Achse 8 gleich dem des Gehäuses ist.

Fig. I/3 verdeutlicht mit zwei maßstäblichen Schnittzeichnungen die Abmessungen und die Lage der einzelnen Bauelemente.

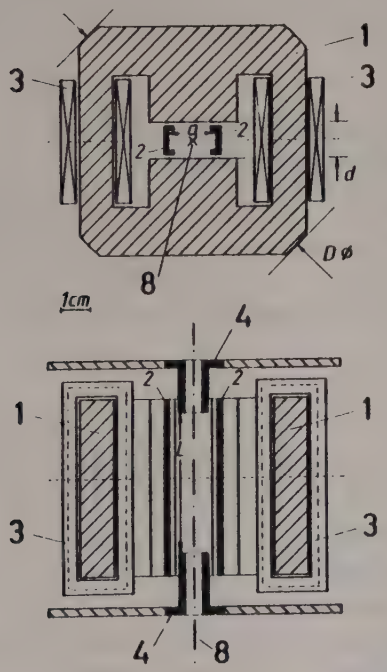


Fig.: I/4
Schnittzeichnungen des Wien-Filters
1: Ringmagnet
2: Kondensatorplatten
3: Magnetspulen
4: Abschirmzylinder
8: Optische Achse
L: Wirksame Länge
D: Durchmesser des Magneten
a: Abstand der Kondensatorplatten
d: Breite des Magnetspaltes

I-2 2. Mechanische und elektrische Daten

Elektrisches Feld:

Kondensator:

Plattenabstand	:	a = (16 ± 0,5) mm
wirksame Länge	:	L = (47 ± 0,5) mm
typische Feldstärke:		E = 0,2 V/m
Material	:	poliertes Aluminium

Die besondere Form der Platten 2 dient zur Homogenisierung des elektrischen Feldes.

Das bei den Messungen der Kohärenzlänge benötigte Verhältnis L/a folgt aus den Abmessungen des Kondensators:

$$\frac{L}{a} = 2{,}94 \pm .12$$

Durch Messung der elektrischen Ablenkung des Kondensators ergibt sich das effektive Verhältnis:

$$\left(\frac{L}{a}\right) = 2{,}6 \pm 0{,}4$$

Bei den Messungen der Kohärenzlänge wurde der Wert des geometrischen Verhältnisses benutzt.

Spannungsversorgung:

Zwei stabilisierte Spannungsquellen:	HB 250 M, Kepco New York
regelbare symmetrische Spannung	0 V bis ± 250 V

Magnetisches Feld:

Magnet:

Breite des Magnetspaltes	:	d = 12 mm
wirksame Länge des Feldes	:	L = 47 mm
Durchmesser des Magneten	:	D = 100 mm
Windungszahl der Spulen	:	3500
typische Werte des Magnetfeldes		
magnetische Induktion	:	B = 0,45 mT = (4,5 Gauß)
magnetische Feldstärke	:	H = 350 A/m

I-2

Material:

Magnetreineisen S 1, Vacuumschmelze Hanau,
Flächen des Spaltes poliert.

Die Abschirmzylinder 4 (Fig.: I/3) am Ein- und Ausgang des Filters sind zur Verringerung der Streufelder aus Hyperm gefertigt (Legler, 1963).

Stromversorgung:

Batterie mit drei verschieden großen Vorwiderständen, mit deren Hilfe sich der Spulenstrom verschieden fein regeln läßt.

Aufhängung:

Spiel- und reibungsfreie Aufhängung, drehbar und in zwei Richtungen zu verschieben.

I-3 BEOBACHTUNG (Funktionseinheit III)

Nach Fig.: I/1 besteht die Funktionseinheit III (Vergrößerung und Beobachtung) aus den beiden Zylinderlinsen L_{III} und L_{IV} und einem Bildverstärker, dessen Durchsichtleuchtschirm über einen Drehspiegel wahlweise fotografiert oder mit einer Fernsehkamera beobachtet werden kann.

1. Linsen

Vergrößerungslinse L_{III}:
Bildet die 2. Interferenzebene mit etwa 100 facher Vergrößerung auf den Bildverstärker ab.
Brennweite $f_{III} \approx 1$ mm

Querlinse L_{IV}:
langbrennweitige Linse, begradigt die Interferenzstreifen durch Dehnung in Längsrichtung.

2. Bildverstärker

Selbstgebauter zweistufiger Bildverstärker mit Mikrokanalplatten und Durchsichtleuchtschirm (Kazan 1974), (Wohland 1980).

Plattenhersteller: Galileo Electro-Optics Corp.
Sturbridge, Massachusetts, USA

Typ: 1. Platte		CEMA 60 40 B S 00
2. Platte		CEMA 60 40 B S 21
Durchmesser des Bildfeldes:		40 mm
Auflösung	:	5 Linien/mm
maximale Verstärkung	:	10^7 Elektronen/Elektron

I-3

3. Dokumentation

Fernsehanlage:

875-Zeilen Fernsehanlage der Firma Grundig mit Kamera FA 70 B, Monitor, und Magnetbandgerät zur Aufzeichnung dynamischer Prozesse.

Photokamera:

Kleinbildkamera, Rollei SL 35 mit Nahlinse.
Abbildungsverhältnis (Film/Bildverstärker): 1:4

II EINFLUSS DER LINSE L_{II} AUF DIE BIPRISMAINTERFERENZEN

II-1 INTENSITÄTSVERTEILUNG IN DER INTERFERENZEBENE

1. Ohne Linse
2. Abbildung des Interferenzfeldes mit L_{II}
3. Laterale Ausdehnung und Spektrum der Quelle
4. Intensitätsverteilung der Interferenz bei "realer" Quelle
   - Mittelung über den Ort ξ
   - Abhängigkeit des Streifenabstandes s von der Wellenzahl k
   - Mittelung über die Wellenzahl k
5. Kontrast, Längen- und Winkelkohärenz

II-2 ZAHL DER INTERFERENZSTREIFEN

1. Mit Linse
2. Ohne Linse
3. Verkürzung der Wellenpakete durch L_{II}

II-1 INTENSITÄTSVERTEILUNG IN DER INTERFERENZEBENE

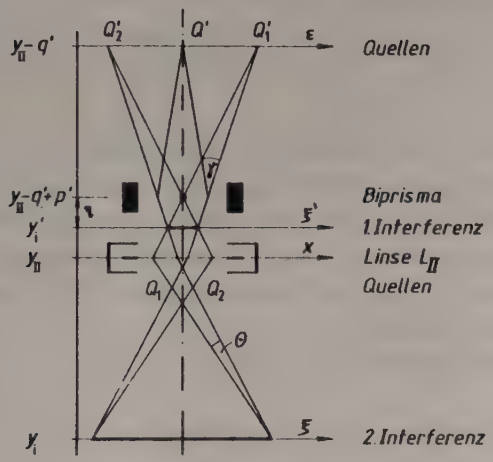


Fig.: II/1 Ausschnitt aus dem Gesamtstrahlengang (schematisch)

1. Ohne Linse L_{II}

Für den Fall, daß sich zwischen den virtuellen Quellen Q_1' und Q_2' einerseits und der Interferenzebene andererseits keine Linse befindet, hat J. Faget (1961) die Interferenzerscheinung untersucht, insbesondere auch den Einfluß einer endlichen lateralen Ausdehnung der Quelle Q' ("Winkelkohärenz") auf den Kontrast der Interferenzstreifen. K.J. Braun hat diese Untersuchung auf den Einfluß einer endlichen Breite des Wellenzahlspektrums ("Längenkohärenz") erweitert (1972).

Die Ergebnisse dieser Oberlegungen können auf die Beschreibung der Intensitätsverteilung in der Interferenzebene $y = y_i'$ zwischen Biprisma und Linse L_{II} übernommen werden:

II-1 Ein durch den Wert ε seiner x-Koordinate gekennzeichneter Punkt der reellen Quelle Q' erzeugt in der Ebene $y = y_i'$ eine Intensitätsverteilung

$$(2\text{-}1) \quad i(\xi') = 2 J_0' \left[1 + \cos\left(2\gamma \frac{\rho' k}{\rho' + \eta} \left(\xi' - \frac{\eta}{\rho'} \varepsilon \right) \right) \right]$$

Dabei ist ρ' der Abstand der Quellenebene $y = y_{II} - q'$ und η der Abstand der Interferenzebene y_i' vom Bisprisma. $\xi' = \eta\varepsilon/\rho'$ kennzeichnet die Lage des "Weißstreifens" in der Interferenzebene, bei welchem die optische Weglängendifferenz zwischen den beiden kohärenten Teilstrahlen verschwindet. $k = 2\pi/\lambda$ ist die "Wellenzahl", λ die Elektronenwellenlänge.

2. Abbildung des Interferenzfeldes mit Linse L_{II}

Die Intensitätsverteilung (2-1) wird nach der Abbildungsgleichung für schwache Linsen mit der Vergrößerung

$$(2\text{-}2) \quad M = - \frac{f_{II}}{(q' - \rho' - \eta) - f_{II}} = - \frac{y_i - y_{II}}{q' - \rho' - \eta} < 0$$

auf die Interferenzebene

$$(2\text{-}3) \quad y_i = y_{II} + \frac{(q' - \rho' - \eta) f_{II}}{(q' - \rho' - \eta) - f_{II}} = y_{II} - M(q' - \rho' - \eta)$$

abgebildet.

II-1 Im Experiment wird die Interferenzebene y_i festgehalten, aber die Vergrößerung M sowie die Interferenzebene y_i' und damit η können durch Variation der Brennweite f_{II} der Linse L_{II} variiert werden. In der Interferenzebene y_i entsteht durch die Abbildung die Intensitätsverteilung

$$(2\text{-}4)\quad i(\xi) = \frac{2J_0'}{|M|}\left[1 + \cos\left(2\gamma\frac{p'k}{p'+\eta}\left(\frac{\xi}{M} - \frac{\eta}{p'}\varepsilon\right)\right)\right]$$

Der Abstand zweier benachbarter Intensitätsmaxima ("Streifenabstand") wird

$$(2\text{-}5)\quad s = \bar{\Pi}\frac{|M|}{\gamma}\frac{p'+\eta}{p'}\frac{1}{k} = \frac{2\bar{\Pi}}{k\theta} = \frac{\lambda}{\theta}$$

so daß mit $J_0 := J_0'/|M|$,

$$(2\text{-}6)\quad i(\xi) = 2J_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\bar{\Pi}}{s}\left(\xi - M\frac{\eta}{p'}\varepsilon\right)\right)\right]$$

ist.

3. Laterale Ausdehnung und Spektrum der Quelle

Durch eine endliche laterale Quellenausdehnung und eine endliche Breite des Wellenzahlspektrums wird die Intensitätsverteilung (2-6) in der Interferenzebene "verschmiert". Wir beschreiben die laterale Quellenausdehnung durch eine Verteilungsfunktion $F_1(\varepsilon)$, das Spektrum durch eine Verteilungsfunktion $F_2(k)$. Beide seien normiert und im übrigen durch ihre Mittelwerte und ihre Standardabweichungen gekennzeichnet:

$$(2\text{-}7)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\varepsilon)\,d\varepsilon = 1 \;;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon F_1(\varepsilon)\,d\varepsilon = 0 \;;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 F_1(\varepsilon)\,d\varepsilon =: \varepsilon_0^2 ;$$

II-1

$$(2\text{-}8)\qquad \int_0^\infty F_2(k)\,dk = 1 \;;\; \int_0^\infty k\,F_2(k)\,dk =: k_0 \;;$$

$$\int_0^\infty (k-k_0)^2 F_2(k) =: (\Delta k)^2 \;;$$

$F_1(\varepsilon)$ sei nur in einer nahen Umgebung von $\varepsilon = 0$, $F_2(k)$ nur in der nahen Umgebung von $k = k_0$ merklich von Null verschieden. Geeignete Modellfunktionen mit diesen Eigenschaften sind

$$(2\text{-}9)\qquad F_1(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon_0\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon_0^2}\right) \;;$$

$$F_2(k) = \frac{1}{\Delta k\sqrt{2\pi}}\,\exp\left(-\frac{(k-k_0)^2}{2(\Delta k)^2}\right) .$$

Für die Untersuchung des Einflusses der Kohärenz auf den Kontrast im Rahmen der vorliegenden Dissertation genügt es, die Verteilungsfunktion durch ihre ersten und zweiten Momente zu kennzeichnen. Wenn man den Einfluß auch dritter oder höherer Momente berücksichtigt, etwa um eine zu $k = k_0$ unsymmetrische Verteilungsfunktion $F_2(k)$ zu beschreiben, so kann sich in dieser Näherung ein schwach vom Ort ξ abhängiger Streifenabstand in der gemittelten Intensitätsverteilung ergeben (Braun 1972). Dasselbe kann geschehen, wenn die Bildfehler 3. Ordnung der Abbildungslinse, insbesondere die Verzeichnung, zu groß sind, um vernachlässigt werden zu können.

4. Interferenz mit "realer" Quelle

Die "verschmierte" Intensitätsverteilung wird

$$(2\text{-}10)\qquad J(\xi) = \iint i(\xi,\varepsilon,k)\,F_1(\varepsilon)\,F_2(k)\,d\varepsilon\,dk$$

$$= 2J_0 + 2J_0 \iint \cos\left[\frac{2\pi}{s}\left(\xi - M\frac{\eta_k}{\rho'}\varepsilon\right)\right] F_1(\varepsilon)\,F_2(k)\,d\varepsilon\,dk \;.$$

II-1 Mittelung über ε

Die Integration über ε ergibt:

$$(2\text{-}11)\quad J(\xi) = 2J_0 + 2J_0 \int \cos\left(2\pi \frac{\xi}{s}\right) \exp\left(-2\left(\frac{\pi}{s} M \frac{\eta}{\rho'} \varepsilon_0\right)^2\right) F_2(k)\, dk$$

Um die Mittelung über k durchführen zu können, müssen wir die Abhängigkeit des Streifenabstandes s(k) von der Wellenzahl k kennen. Außer der expliziten Abhängigkeit von k folgt aus Gleichung (2-5) noch eine implizite, da auch γ', M, η und q' von k abhängen. q' hängt von k wegen des Farbfehlers der ersten Linse, y_i wegen des Farbfehlers der dritten und vierten Linse ab.

Abhängigkeit des Streifenabstandes s von der Wellenzahl k

Faget hat in seiner Dissertation (1961) diskutiert, bei welchen Linsenstärken die erste und zweite Linse betrieben werden müssen, damit die Abhängigkeiten von k, $\gamma'(k)$, M(k) und q'(k) sich in dem Ausdruck für den Streifenabstand gegenseitig aufheben. Er spricht in diesem Fall von einer Achromasie der Streifen, berücksichtigt aber nicht, daß auch der Abstand η der ersten Interferenzebene y_i' vom Biprismafaden bei festgehaltener zweiter Interferenzebene y_i von k abhängt. Die Abhängigkeit des Ablenkwinkels γ' folgt aus (1-1) zu

$$(2\text{-}12)\quad \gamma'(k) = \gamma_0 \frac{U_F}{U_B(k)} = 2\gamma_0 \frac{em}{h^2} U_F \frac{1}{k^2} \quad ,$$

die der Vergrößerung aus (2-2) zu

$$(2\text{-}13)\quad M(k) = 1 - \frac{y_I(k) - y_{II}}{f_{II}(k)} \quad .$$

II-1 Für die Lage der Interferenzebene y_i' folgt aus der Abbildungsgleichung (2-3)

$$(2\text{-}14)\quad p' + \eta(k) = q'(k) - \frac{\left(y_i(k) - y_{\overline{II}}\right) f_{\overline{II}}(k)}{y_i(k) - y_{\overline{II}} - f_{\overline{II}}(k)} \quad .$$

Damit wird aus (2-5)

$$(2\text{-}15)\quad S(k) = \overline{\eta}\,\frac{q'(k)\left(y_i(k) - y_{\overline{II}}\right) - \left(y_i(k) - y_{\overline{II}} + q'(k)\right) f_{\overline{II}}(k)}{p'\,k\;\gamma(k)\,f_{\overline{II}}(k)}$$

Wie aus Fig.: I/2 ersichtlich, ist in dem praktisch in Frage kommenden Linsenstärkenbereich

$$(2\text{-}16)\quad f_{\overline{II}} \sim U_B^{2,7} \sim k^{5,4} \quad .$$

Aus (2-15) folgt durch Differentiation

$$(2\text{-}17)\quad \frac{dS}{dk} = \frac{\partial S}{\partial k} + \frac{\partial S}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dk} + \frac{\partial S}{\partial f_{\overline{II}}}\frac{df_{\overline{II}}}{dk} + \frac{\partial S}{\partial q'}\frac{dq'}{dk} + \frac{\partial S}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dk}$$

$$= \frac{S}{k} + \frac{\overline{\eta}}{\gamma\, p'k\, f_{\overline{II}}}\left(- \frac{q'\left(y_i - y_{\overline{II}}\right)}{f_{\overline{II}}}\,\frac{df_{\overline{II}}}{dk} + \left(y_i - y_{\overline{II}} - f_{\overline{II}}\right)\frac{dq'}{dk} + \left(q' - f_{\overline{II}}\right)\frac{dy_i}{dk}\right) \quad .$$

Mit den experimentellen Daten ($y_i - y_{II}$ = 39 cm; q' = 32 cm; 3,2 cm < f_{II} < 4,1 cm) ergibt sich, daß der erste Summand in der Klammer auf der rechten Seite groß gegen die beiden folgenden ist, selbst wenn dq'/dk und dy_i/dk von gleicher Größenordnung wie df_{II}/dk wären. Tatsächlich wird aber die Linse L_{II} mit viel geringerer Brechkraft betrieben als die Linsen L_I und L_{III}, so daß die zu dq'/dk und dy_i/dk proportio-

II-1 nalen Terme vernachlässigt werden dürfen. Eine vollständige Analyse müßte auch die Abhängigkeit der Abbildungseigenschaften der Linsen L_{III} und L_{IV} von k untersuchen.

Mittelung über k

Bei der Mittelung über k kann der Exponentialfaktor im Integranden in Gleichung (2-11) vor das Integral gezogen werden, da sein Exponent von zweiter Ordnung in der Standardabweichung ε_0, also nur sehr schwach mit k veränderlich ist. Dagegen muß der für $|\xi| \gg s$ rasch mit k veränderliche Cosinusfaktor in die Mittelung einbezogen werden: Mit $s(k_0) =: s_0$ wird bis auf Glieder von zweiter und höherer Ordnung in $(k-k_0)$

$$(2\text{-}18) \quad S(k) = S_0 \left[1 + \frac{k-k_0}{S_0} \left(\frac{dS}{dk} \right)_{k=k_0} \right]$$

und

$$(2\text{-}19) \quad \frac{2\pi\xi}{S(k)} = \frac{2\pi\xi}{S_0} \left[1 - \frac{k-k_0}{S_0} \left(\frac{dS}{dk} \right)_{k=k_0} \right] .$$

Aus (2-17) folgt mit (2-2), (2-5) und (2-13) bei Vernachlässigung des Farbfehlers der Linsen L_I und L_{III}

$$(2\text{-}20) \quad \frac{1}{S_0} \left(\frac{dS}{dk} \right)_{k=k_0} = \frac{1}{k_0} - \frac{q'(M-1)}{Mq' + y_i - y_{\bar{I}}} \left(\frac{1}{f_{\bar{I}}} \frac{df_{\bar{I}}}{dk} \right)_{k=k_0}$$

$$= \frac{1}{k_0} \left(1 - \frac{q'(M-1)}{Mq' + y_i - y_{\bar{I}}} \cdot 5{,}4 \right) .$$

Mit der Abkürzung

$$(2\text{-}21) \quad \nu(M) := \frac{q'(M-1)}{Mq' + y_i - y_{\bar{I}}} \cdot 5{,}4$$

II-1 wird aus (2-19)

$$(2\text{-}22)\quad \frac{2\pi\xi}{s} = \frac{2\pi\xi}{s_0}\left[1 + \frac{k-k_0}{k_0}\left(\gamma(M)-1\right)\right]$$

Im Grenzfall hoher Vergrößerung ($M \to -\infty$) wird $\gamma(-\infty) = 5{,}4$; mit den unter Gleichung (2-17) gegebenen Daten variiert γ zwischen 6,60 und 7,04. Mit (2-9) ergibt die Mittelung über k

$$(2\text{-}23)\quad J(\xi) = 2J_0 + 2J_0 \cos\left(\frac{2\pi\xi}{s_0}\right) \cdot \exp\left(-2\left(\tilde{\pi}\frac{\eta\varepsilon_0}{s_0 p'}M\right)^2\right)$$

$$\cdot \exp\left(-2\left(\tilde{\pi}\frac{\Delta k\,\xi}{s_0 k_0}(\gamma-1)\right)^2\right) .$$

5. Kontrast, Längen- und Winkelkohärenz:

Aus (2-23) folgt für den Kontrast

$$(2\text{-}24)\quad K := \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max} + J_{min}}$$

$$= \exp\left(-2\left(\tilde{\pi}\frac{\eta\varepsilon_0}{s_0 p'}M\right)^2\right) \cdot \exp\left(-2\left(\tilde{\pi}\frac{\Delta k\,\xi}{s_0 k}(\gamma-1)\right)^2\right) .$$

Der erste Faktor auf der rechten Seite

$$(2\text{-}25)\quad K' := \exp\left(-2\left(\tilde{\pi}\frac{\eta\varepsilon_0}{s_0 p'}M\right)^2\right)$$

beschreibt die vom Ort ξ unabhängige Kontrastabnahme infolge der endlichen Quellenbreite ε_0 ("Winkelkohärenz"), während eine endliche Breite Δk der Wellenzahlverteilung ("Längenkohärenz") bewirkt, daß der Kontrast mit zunehmendem Abstand $|\xi|$ von seinem bei $\xi = 0$ gelegenen Maximalwert abnimmt. Die Forderung, daß der erste Faktor K' nicht klein

II-1 gegen Eins sein darf, wenn man Interferenzstreifen beobachten will, heißt "Winkelkohärenzbedingung":

$$(2\text{-}26)\quad \frac{2\pi}{s_0}\,|M|\,\frac{\eta}{p'}\,\varepsilon_0 \leq 1 \qquad \text{oder}$$

$$\vartheta \leq \frac{p'}{|M|\,k_0\,\eta\,\varepsilon_0} \qquad \text{oder} \qquad \gamma \leq \frac{p'+\eta}{2\,k_0\,\eta\,\varepsilon_0}$$

Entsprechend folgt aus der Forderung, daß der zweite Faktor auf der rechten Seite von (2-24) nicht klein gegen Eins sein darf, die "Längenkohärenzbedingung"

$$(2\text{-}27)\quad \frac{2\pi}{s_0}\,|\xi|\,\Delta k\,\frac{|\nu-1|}{k_0} \leq 1 \quad ;$$

$$|\xi| \leq \frac{k_0 s_0}{2\pi\,\Delta k\,|\nu-1|} \quad .$$

II-2 ZAHL DER INTERFERENZSTREIFEN

1. Mit Linse

Die Breite B' des Interferenzfeldes in der Interferenzebene y_i', in der Streifen beobachtet werden können, ist dadurch begrenzt, daß die scheinbar von den virtuellen Quellen Q_1' und Q_2' kommenden Strahlen den Biprismafaden auf verschiedenen Seiten passieren, d.h.

$$B' = 2\gamma\eta \qquad (2\text{-}28)$$

Die entsprechende Interferenzfeldbreite B in der Interferenzebene y_i ist

$$B = 2\gamma\eta\,|1|\,| \qquad (2\text{-}29)$$

Im Experiment erscheint die Begrenzung des Interferenzfeldes als "Schattengrenze", weil dort jeweils eine der virtuellen Quellen vom Biprismafaden abgeschattet wird. Mit (2-5) gilt für die Zahl der zwischen den Schattengrenzen beobachtbaren Interferenzstreifen

$$N = \frac{B}{s_0} = \frac{1}{\pi}\gamma\eta\theta\, k_0\,|M| = \frac{2}{\pi}\gamma^2 k_0 \frac{p'\eta}{(p'+\eta)} \qquad (2\text{-}30)$$

Wegen der Winkelkohärenzbedingung (2-26) kann γ nicht beliebig groß gemacht werden. Vielmehr ist

$$N < N_W := \frac{p'(p'+\eta)}{2\pi k_0 \eta \varepsilon_0^2} \qquad (2\text{-}31)$$

Will man also eine große Streifenzahl N beobachten, so muß man den Abstand η der Interferenzebene y_i' vom Biprismafaden möglichst klein wählen. Dabei muß für den Ablenkwinkel γ im Biprisma jeweils der nach der Winkelkohärenzbedingung (2-26) maximal zulässige Wert gewählt werden. Der Verminderung von η bei gleichzeitiger Erhöhung von γ ist aber eine

II-2 Grenze gesetzt:

Der Streifenabstand $s_0' = s_0/|M|$ in der Interferenzebene y_i', der bei Einhaltung der Winkelkohärenzbedingung (2-26) $s_0' = 2\pi\varepsilon_0\eta/p'$ beträgt, wird nämlich schließlich vom elektronenoptischen Abbildungssystem nicht mehr aufgelöst.

Aus (2-31) erhält man beispielsweise mit $p' = 20$ cm; $\eta = 8$ cm; $\lambda_0 = 1{,}7\cdot10^{-9}$ cm $= 2\pi/k_0$ und $\varepsilon_0 = 3\cdot10^{-6}$ cm maximal 330 Streifen. Daß der Zahlenfaktor auf der rechten Seite von (2-31) nicht mit dem von K.J. Braun (1972) angegebenen übereinstimmt, liegt daran, daß dieser ein anderes Maß als die Standardabweichung ε_0 für die Quellenbreite verwendet.

Die Längenkohärenzbedingung (2-27) liefert eine andere obere Schranke für die beobachtbare Streifenzahl:

$$(2\text{-}32)\quad N \le \frac{2|\Xi|_{max}}{s_0} =: N_L = \frac{k_0}{\pi\,\Delta k\,|\gamma-1|}$$

Mit $\Delta k/k_0 = \frac{1}{2}\,\Delta U_B/U_B = 5\cdot10^{-5}$ und $\gamma = 7$ erhält man beispielsweise $N_L = 1060$.

2. Zahl der Interferenzstreifen ohne Linse

Wäre es möglich, die Interferenzerscheinung in der Ebene y_i' auch ohne Nachvergrößerung durch eine oder mehrere Elektronenlinsen zu beobachten, so wäre das Verhältnis N_L/N_W um den Faktor $|\gamma-1|$ größer. Der Streifenabstand beträgt dort $s_0' = s_0/|M|$. Die Mittelung über ε in der Ebene $y = y_i'$ hätte nämlich denselben Wert N_W ergeben wie in Gleichung (32), da die Vergrößerung M von ε nicht abhängt. Dagegen hätten wir bei der Mittelung über k den zu df_{II}/dk proportionalen Term in (2-20) weglassen dürfen, denn die Streifenbreite $s' = s/|M| = \pi(p'+\eta)/\gamma p'k$ nach (2-5) ist in der Ebene y_i' wegen (2-12) proportional zu k. Damit

II-2 wird der Kontrast in der Ebene y_i' statt (2-24)

$$(2\text{-}33)\quad K = \exp\left(-2\left(\tilde{\pi}\,\frac{\eta\varepsilon_o}{s_o' p'}\right)^2\right)\cdot\exp\left(-2\left(\tilde{\pi}\,\frac{\xi'\Delta k}{s_o' k_o}\right)^2\right)$$

Die durch die Längenkohärenz gegebene obere Schranke N_L wäre also in diesem Fall statt durch (2-32) durch $N_L = k_o/(\tilde{\pi}\,\Delta k)$ gegeben.

3. Verkürzung der Wellenpakete durch die Linse L_{II}

Eine andere Interpretation der Längenkohärenzbedingung beruht auf folgender Oberlegung: Definiert man die Ordnung

$$(2\text{-}34)\quad n := \frac{\xi}{s_o} = \frac{\xi'}{s_o'}$$

eines Interferenzmaximums, so hat der Weißstreifen bei $\xi = 0$ die Ordnung Null, und aus der durch die Längenkohärenz bedingten oberen Schranke N_L folgt eine obere Schranke für die höchste beobachtbare Ordnung $|n| \leq N_L/2$. Im Maximum n-ter Ordnung beträgt die elektronenoptische Weglängendifferenz zwischen den beiden kohärenten Teilwellen $n\lambda$. Die maximale mit der Längenkohärenzbedingung verträgliche Weglängendifferenz ("Kohärenzlänge") beträgt also bei Beobachtung ohne Linse

$$(2\text{-}35)\quad \Delta l = \frac{1}{2}\,\lambda N_L = \frac{1}{2\tilde{\pi}}\,\lambda\,\frac{k_o}{\Delta k} = \frac{1}{\Delta k}$$

Man kann die miteinander interferierenden Wellenzüge also als "Wellenpakete" auffassen, die nur dann interferenzfähig sind, wenn $\Delta l\,\Delta k \leq 1$ ist, was mit $p := \hbar k$ auch in der Form $\Delta l\,\Delta p \leq \hbar$ geschrieben werden kann. Die Linse L_{II} hat also einen verkürzenden Einfluß auf die Kohärenzlänge Δl, die nach Durchgang durch die Linse nur noch $1/(|\Delta k|\nu - 1|)$ beträgt.

II-2 Die bisher beschriebene Anordnung, das elektronenoptische Biprisma mit oder ohne Nachvergrößerung des Interferogramms durch Linsen, aber ohne Wien-Filter, ist zur Messung der Kohärenzlänge wenig geeignet, weil im allgemeinen $N_L \gg N_W$ ist, so daß innerhalb der Schattengrenzen kaum eine laterale Kontrastabnahme der Streifen zu beobachten ist.
Dagegen ist es bei Verwendung eines Interferometers mit Wien-Filter möglich, durch Beobachtung des Kontrastes des zentralen Interferenzmaximums in der Mitte der Beobachtungsebene in Abhängigkeit von der Anspannung des Wien-Filters in einer Weise auf die Kohärenzlänge zu schließen, die unabhängig von den Abbildungseigenschaften der Linsen ist. Dies wird in den folgenden Kapiteln diskutiert.

III OPTIK DES WIEN-FILTERS

III-0 VORBEMERKUNG

III-1 ENTSPANNTES WIEN-FILTER

1. Strahlengang
2. Konvergenzwinkel, Streifenabstand,
   mittlerer Bündelabstand bei entspanntem Filter

III-2 ANGESPANNTES WIEN-FILTER

1. Strahlengang
2. Berechnung der Bahngleichungen im Filter
   - Wien-Bedingung
3. Linsenwirkung des Wien-Filters
   - Brennweite
4. Konvergenzwinkel, Streifenabstand,
   mittlerer Bündelabstand bei angespanntem Filter
5. Krümmung der Interferenzstreifen

III-0 VORBEMERKUNG

Im folgenden wird zunächst anhand des Strahlenganges im entspannten Wien-Filter der Konvergenzwinkel und der Streifenabstand für die zweite Interferenzebene (siehe Fig.: I/1), sowie der mittlere Bündelabstand der Teilstrahlen im Filter angegeben.

Für das angespannte Filter werden sodann die Bahngleichungen für die Elektronen berechnet, und die sogenannte Wien-Bedingung erläutert. Mit Hilfe der Bahngleichungen wird sen and Le Poole, 1970) untersucht und die zugehörige Brennsen and Poole, 1970) untersucht und die zugehörige Brennweite abgeleitet.

Wie für das entspannte Filter werden wieder Konvergenzwinkel, Streifenabstand und mittlerer Bündelabstand, jetzt in ihrer Abhängigkeit von der Anspannung des Filters, berechnet.

Zum Schluß wird eine qualitative Erklärung für die durch das Wien-Filter verursachte Krümmung der Interferenzstreifen gegeben.

III-1 ENTSPANNTES WIEN-FILTER

1. Strahlengang

Die Anordnung des Wien-Filters im Gesamtstrahlengang ist in Fig. I/1 dargestellt, sein mechanischer und elektrischer Aufbau in I-2 beschrieben.

Die folgenden Überlegungen stützen sich auf Fig. III/1.

Die Quellen Q_1 und Q_2 sind die von der Linse L_{II} erzeugten reellen Bilder der vom Biprisma gebildeten virtuellen

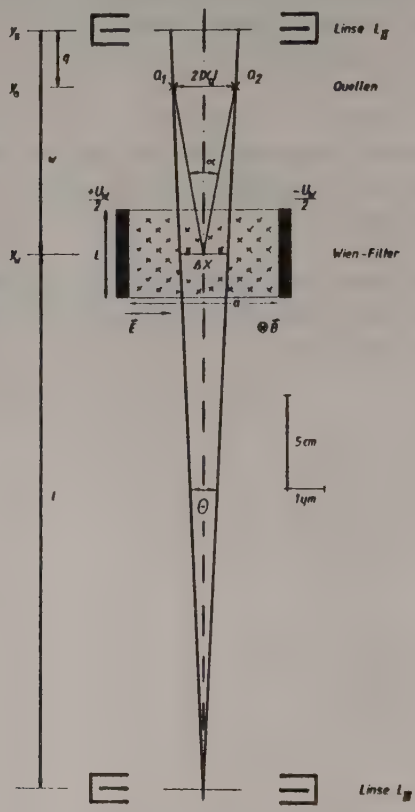


Fig.: III/1 Strahlengang im entspannten Wien-Filter
Zwei Teilstrahlen, die sich in der Beobachtungsebene L_{III} überlagern, haben im Filter einen mittleren Abstand ΔX voneinander.

III-1 Quellen Q_2' und Q_1' (siehe Fig. I/1). Für die Koordinaten x_{Q1}, x_{Q2} und y_Q gelten die Gleichungen (1-4) und (1-5).

In den folgenden Betrachtungen zu den Vorgängen im Wien-Filter wird von diesen reellen Bildern als kohärenten Quellen ausgegangen, ohne ihre Entstehung näher zu betrachten.

Diese beiden Quellen beleuchten die Beobachtungsebene, die praktisch mit der Mittelebene der stark angespannten Linse L_{III} zusammenfällt.

2. Konvergenzwinkel, Streifenabstand, mittlerer Bündelabstand im entspannten Wien-Filter

Aus den Gleichungen (2-2) und(2-5) folgt durch Elimination von M und η für den Konvergenzwinkel

$$(3\text{-}1) \qquad \theta = \frac{2\gamma\rho' f_{\overline{II}}}{q'(y_i - y_{\overline{I}}) - (y_i - y_{\overline{II}} + q')\, f_{\overline{II}}}$$

$$= \frac{2\gamma\rho' f_{\overline{II}}}{q'(w+l) - (w+l+q')\, f_{\overline{II}}} \qquad ;$$

für den Streifenabstand

$$(3\text{-}2) \qquad s = \frac{2\tilde{\pi}}{k\theta} = \frac{\lambda}{\theta}$$

und für den mittleren lateralen Abstand Δx der Teilbündel im Wien-Filter

$$(3\text{-}3) \qquad \Delta X = l\theta = \frac{\lambda l}{s}$$

Dabei sind w und l die Abstände der Mittelebene des Wien-Filters von den Mittelebenen der Linsen L_{II} und L_{III} (siehe Fig.: III/1).

III-2 ANGESPANNTES WIEN-FILTER

1. Strahlengang

Die Felder des Wien-Filters wirken in der in I-2 beschriebenen Anordnung auf einen Elektronenstrahl wie eine Kombination aus Zylinderlinse und Prisma (Herzog 1934), (Andersen und Le Poole 1970).

Heben die elektrischen und magnetischen Kräfte längs der optischen Achse einander auf (abgeglichenes Wien-Filter), so verschwindet der prismatische Anteil und das Filter wirkt im Strahlengang wie eine schwache Zylinderlinse.

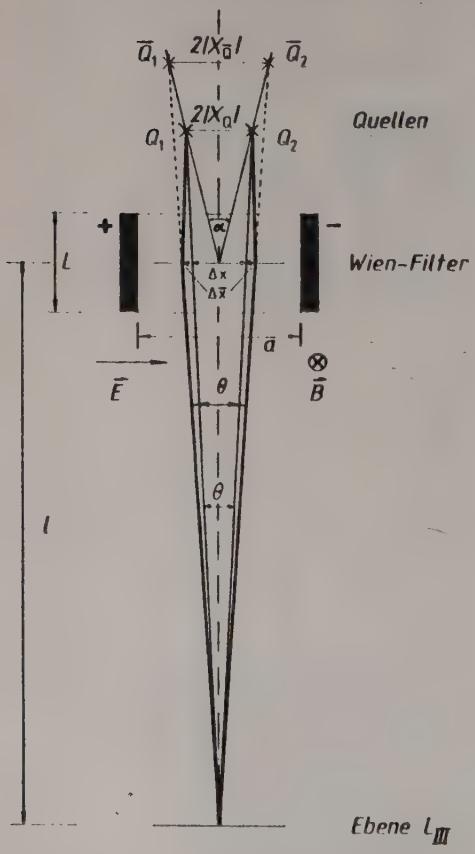


Fig.: III/2
Die Linsenwirkung des Wien-Filters

Das abgeglichene Wien-Filter wirkt wie eine langbrennweitige Zylinderlinse, die aus den reellen Quellen Q_1, Q_2 die virtuellen Bilder $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ erzeugt.

III-2 Die Fig.: III/2 zeigt den Strahlengang mit und ohne Anspannung des Wien-Filters.

Durch die Linsenwirkung des Filters wird der Abstand Δx zweier Strahlen, die sich in der 2. Interferenzebene schneiden, vergrößert. $\Delta \bar{x}$ und damit $\bar{\theta}$ sind also im Experiment abhängig von der Anspannung des Wien-Filters. Im folgenden werden diese Abhängigkeiten berechnet.

2. Bahngleichungen im Filter

In allen folgenden Rechnungen wird angenommen, daß im Intervall $y_w - \frac{L}{2} < y < y_w + \frac{L}{2}$ mit $y_w = y_{II} + w$ ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = (E; o; o)$ und ein homogenes magnetisches Feld $\vec{B} = (0; 0; B)$ herrscht, das außerhalb des genannten Intervalls verschwindet. Tatsächlich ist ein solcher diskontinuierlicher Übergang an den Intervallgrenzen nicht mit den Feldgleichungen verträglich, und es treten "Streufelder" auf. Für die folgenden Überlegungen genügt aber eine Näherung, bei der die Streufelder vernachlässigt werden, die in der Teilchenspektrometrie als SCOFF ("sharp cut-off fringing field")-Näherung bezeichnet wird. In dieser Näherung kann die Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{E} - e\vec{v}\times\vec{B}$ in Komponenten wie folgt geschrieben werden:

$$(3\text{-}4) \quad m\ddot{x} = -eE - eB\dot{y} \;;\; m\ddot{y} = eB\dot{x} \;;\; m\ddot{z} = o$$

Ferner gilt der Energiesatz

$$(3\text{-}5) \quad \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + eEx = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_o^2 + \dot{y}_o^2 + \dot{z}_o^2\right) + eEx$$

$$= \frac{1}{2} m v_o^2 = eU_B$$

III-2 Dabei sind x_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ die "Anfangswerte" der Größen x, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ beim Eintritt in das Feld, d.h. für $y = y_0 := y_w - L/2$. Mit den gegebenen Anfangswerten hat die Bewegungsgleichung (3-4) die Lösung

$$x = x_0 + \frac{m\dot{x}_0}{eB}\sin\left(\frac{eB}{m}t\right) - \frac{m}{eB}\left(\dot{y}_0 + \frac{E}{B}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{eB}{m}t\right)\right) \quad ;$$

$$(3\text{-}6) \quad y = y_0 - \frac{E}{B}t + \frac{m\dot{x}_0}{eB}\left(1 - \cos\left(\frac{eB}{m}t\right)\right) + \frac{m}{eB}\left(\dot{y}_0 + \frac{E}{B}\right)\sin\left(\frac{eB}{m}t\right) \quad ;$$

$$z = z_0 + \dot{z}_0 t \quad .$$

Insbesondere gilt für ein Elektron, das mit einer Anfangsrichtung längs der optischen Achse in das Feld des Wien-Filters eintritt, d.h. mit den Anfangsbedingungen $x_0 = 0$; $z_0 = 0$; $\dot{x}_0 = 0$; $\dot{y}_0 = v_0$; $\dot{z}_0 = 0$;

$$(3\text{-}7) \quad x = -\frac{m}{eB}\left(v_0 + \frac{E}{B}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{eB}{m}t\right)\right) \quad ;$$

$$y = y_0 - \frac{E}{B}t + \frac{m}{eB}\left(v_0 + \frac{E}{B}\right)\sin\left(\frac{eB}{m}t\right) \quad .$$

Wird die "Wien-Bedingung"

$$(3\text{-}8) \quad \frac{E}{B} = -v_0 = -\sqrt{2\frac{eU_B}{m}}$$

III-2 eingehalten, so ist also eine Bewegung längs der y-Achse mit der Geschwindigkeit v_0 möglich. Wir bezeichnen in diesem Fall das Wien-Filter auch als "abgeglichen".

Wegen dieser Bedingung, die im Experiment in der Regel eingehalten wird, ist die magnetische Induktion und die elektrische Feldstärke miteinander verknüpft. Die Anspannung des Filters ist also bereits durch die Angabe einer Feldgröße bestimmt. Im folgenden wird dazu immer die elektrische Feldstärke benutzt.

3. Linsenwirkung des Wien-Filters

Während im abgeglichenen Wien-Filter ein längs der optischen Achse laufendes Elektron keine Ablenkung erfährt, gilt für die Krümmung $\varkappa$ einer in der x, y-Ebene außerhalb der y-Achse verlaufende Elektronenbahn mit (3-4)

$$(3\text{-}9) \qquad \varkappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{eE\dot{y} + eB(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

Wegen des Energiesatzes gilt

$$(3\text{-}10) \qquad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_0^2 - 2\frac{e}{m}Ex$$

und bis auf Glieder von 2. und höherer Ordnung in den kleinen Größen x und $\dot{x}$

$$(3\text{-}11) \qquad (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2} = v_0^3\left(1 - 3\frac{e}{m v_0^2}Ex\right) \;;$$

$$\dot{y} = v_0\left(1 - \frac{e}{m v_0^2}Ex\right) \;.$$

III-2 Damit folgt für die Krümmung im abgeglichenen Wien-Filter ($B = -E/v_0$)

$$(3\text{-}12) \qquad \varkappa = \left(\frac{eE}{m v_z^2}\right)^2 X = \left(\frac{1}{2a}\frac{U_w}{U_B}\right)^2 X$$

Ist L die axiale Länge des Filters, so folgt daraus eine Richtungsänderung $\varkappa L$.

Brennweite:

Definiert man wie bei Elektronenlinsen eine "Brennweite" f_W so, daß x/f_W gleich der Richtungsänderung wird (Herzog 1934), so folgt

$$(3\text{-}13) \qquad f_W = \frac{X}{\varkappa L} = \frac{1}{L}\left(2a\frac{U_B}{U_w}\right)^2$$

Aus (3-4) , (3-8) und (3-11) sieht man, daß die Krümmung immer zur y-Achse hin erfolgt, die Linsenwirkung also die einer Sammellinse ist. Da bei den hier beschriebenen Experimenten immer $U_W/a \ll U_B/L$ ist, folgt $f_W \gg L$; tatsächlich ist f_W von der Größenordnung einiger Meter.

4. Konvergenzwinkel, Streifenabstand, mittlerer Bündelabstand im angespannten Wien-Filter

Nach der Abbildungsgleichung für schwache Linsen werden die reellen Quellen Q_1 und Q_2 mit den Koordinaten $\pm x_Q$ und y_Q virtuell auf Quellen mit den durch (1-4) und (1-5) gegebenen Koordinaten $x_{\bar{Q}}$ und $y_{\bar{Q}}$ abgebildet, wobei

$$(3\text{-}14) \qquad x_{\bar{Q}} = \frac{f_w x_Q}{f_w + y_Q - y_w} \quad ;$$

$$y_{\bar{Q}} = y_w + \frac{f_w (y_Q - y_w)}{f_w + y_Q - y_w} \quad .$$

III-2 Daraus folgt für den Konvergenzwinkel

$$(3\text{-}15)\quad \theta(U_W) = \frac{2|x_{\bar{Q}}|}{\ell + y_W - y_{\bar{Q}}} = \frac{2 f_W |x_Q|}{(\ell + y_W - y_Q) f_W - (y_W - y_Q)\ell}$$

$$= \frac{\theta(\sigma)}{1 - \ell\,\theta(\sigma)/\alpha f_W} = \theta(\sigma)\left(1 + \frac{\ell\,\theta(\sigma)}{\alpha f_W}\right)$$

Dabei ist

$$(3\text{-}16)\quad \theta(\sigma) = \frac{2|x_Q|}{\ell + y_W - y_Q}$$

der Konvergenzwinkel bei ausgeschaltetem Wien-Filter ($f_W \to \infty$, vergl. (3-1)) und

$$(3\text{-}17)\quad \alpha := \frac{2|x_Q|}{y_W - y_Q} = \frac{2|x_Q|}{w - q}$$

(vergl. (1-4), Fig.: I/1)
der Winkelabstand der reellen Quellen, von der Mitte des Wien-Filters aus gesehen. Für den Streifenabstand gilt

$$(3\text{-}18)\quad s(U_W) = \frac{\lambda}{\theta(U_W)} = \frac{2\tilde{\pi}}{k\,\theta(U_W)}$$

$$= \frac{\lambda}{\theta(\sigma)}\left(1 - \frac{\ell\,\theta(\sigma)}{\alpha f_W}\right)$$

$$= s(\sigma) - \frac{\ell\lambda}{\alpha f_W}$$

$$= s(\sigma) - \frac{1}{4\alpha}\frac{\ell L}{a^2}\lambda\frac{U_W^2}{U_B^2}$$

III-2 und für den mittleren lateralen Bündelabstand im Wien-Filter

$$(3\text{-}19)\qquad \Delta X(U_w) = l\,\theta(U_w) = l\,\frac{\lambda}{s(U_w)}$$

$$= \Delta X(\sigma)\left(1 + \frac{\Delta X(\sigma)}{\alpha f_w}\right)$$

$$= \Delta X(\sigma)\left(1 + \frac{1}{4\alpha}\,\frac{L}{a^2}\,\frac{U_w^2}{U_B^2}\,\Delta X(\sigma)\right)$$

5. Krümmung der Interferenzstreifen

Die Richtungsverteilung der von einem in der x, y-Ebene liegenden Punkt der Quelle Q_1 oder Q_2 ausgehenden Elektronen ist symmetrisch zu dieser Ebene. Andere Quellpunkte, für die also $z \neq 0$ ist, haben im allgemeinen eine andere Richtungsverteilung, deren Maximum nicht in der x, y-Ebene liegt, sondern durch eine Richtung gekennzeichnet ist, deren Geschwindigkeitsvektor auch eine z-Komponente hat. Das Maximum liegt bei einem Wert von $v_z = \dot{z}$, der für kleine Abstände z von der Ebene z = 0 proportional zu z ist (Kasper und Lenz 1966).

Nach dem Energiesatz (3-5) gilt dann

$$(3\text{-}20)\qquad \dot{y} = \left(\frac{2e}{m}(U_B - Ex) - \dot{x}^2 - \dot{z}^2\right)^{1/2}$$

Die Abweichung der Komponente $v_y = \dot{y}$ vom Betrag v_0 der Anfangsgeschwindigkeit vor Eintritt in das Wien-Filter enthält also nicht nur den durch (3-11) beschriebenen für kleine x in x linearen, sondern auch einen für kleine z in z quadratischen Summanden. Die Krümmung der Projektion der Elektronenbahn auf die x, y-Ebene ist aber, wie wir in II-2-1 gesehen haben, proportional zur Differenz

III-2 $\dot{y}$-v_0. Dies hat eine Krümmung der Interferenzstreifen zur Folge, die durch die nachfolgenden Zylinderlinsen noch verstärkt wird, welche in x-Richtung einen viel höheren Abbildungsmaßstab haben als in z-Richtung. Eine ähnliche Erscheinung wurde von Curtis und Silcox (1970) sowie von Anderson und Le Poole (1970) bei der Abbildung von linearen Elektronenquellen durch ein Wien-Filter beobachtet. Das Bild eines in z-Richtung verlaufenden Spaltes ist umso stärker gekrümmt, je weiter er aus der x, y-Ebene verschoben wird. Für eine quantitative Diskussion der Streifenkrümmung müßte bekannt sein, wie die Richtungsverteilung in den Quellen Q_1 und Q_2 von der z-Koordinate abhängt.

IV KONTRASTMINDERUNG DURCH WIEN-FILTER

IV-0 BESCHREIBUNG, DOKUMENTATION

1. Ablauf des Experimentes
2. Vorversuche

IV-1 ABSTAND DER WELLENPAKETE (1. Erklärung)

1. Gleiche elektronenoptische Weglängen
2. Differenz der Gruppengeschwindigkeiten
3. Längenkohärenzbedingung mit Filter
   (Über Paketabstand)
4. Möglichkeiten zur Messung des Paketabstandes

IV-2 DISPERSION DES WIEN-FILTERS (2. Erklärung)

1. Längenkohärenz und Streifenkontrast mit Wien-Filter
2. Kein Einfluß der Linse L_{II}
3. Längenkohärenzbedingung mit Wien-Filter
   (Über Dispersion)
4. Anschauliche Wirkung des Wien-Filters

IV-0 BESCHREIBUNG, DOKUMENTATION

Fig.: IV/1 dokumentiert die Kontrastabnahme beim Anspannen des Wien-Filters. Der experimentelle Aufbau ist in Fig.: I/1 dargestellt. Die Aufnahmen wurden mit der Kleinbildkamera vom Durchsichtleuchtschirm des Bildverstärkers fotografiert.

1. Ablauf des Experiments

Die Spannung U_w am Kondensator des Wien-Filters wird erhöht, und der Spulenstrom des Magneten so nachgeführt, daß das Interferenzfeld im Beobachtungsbereich bleibt.

Zunächst bleibt der Kontrast des Interferenzfeldes nahezu unverändert. Die Anspannung des Filters ist lediglich an der Krümmung der Streifen zu erkennen.

Bei weiterer Erhöhung der Wien-Spannung U_w wird der Kontrast schlechter, und die Anzahl der sichtbaren Streifen verringert sich, bis schließlich für $U_w = U_{wK}$ keine Interferenz mehr zu beobachten ist.

2. Vorversuche

In einer Reihe von Vorversuchen wurde festgestellt, daß weder die Größe der Elektronenquelle noch die Amplitude der magnetischen Störfelder wesentlichen Einfluß auf den beschriebenen Ablauf des Experiments haben. Das Verschwinden des Kontrastes mit zunehmender Wien-Spannung ist also weder eine Folge mangelhafter Winkelkohärenz noch von Störfeldern.

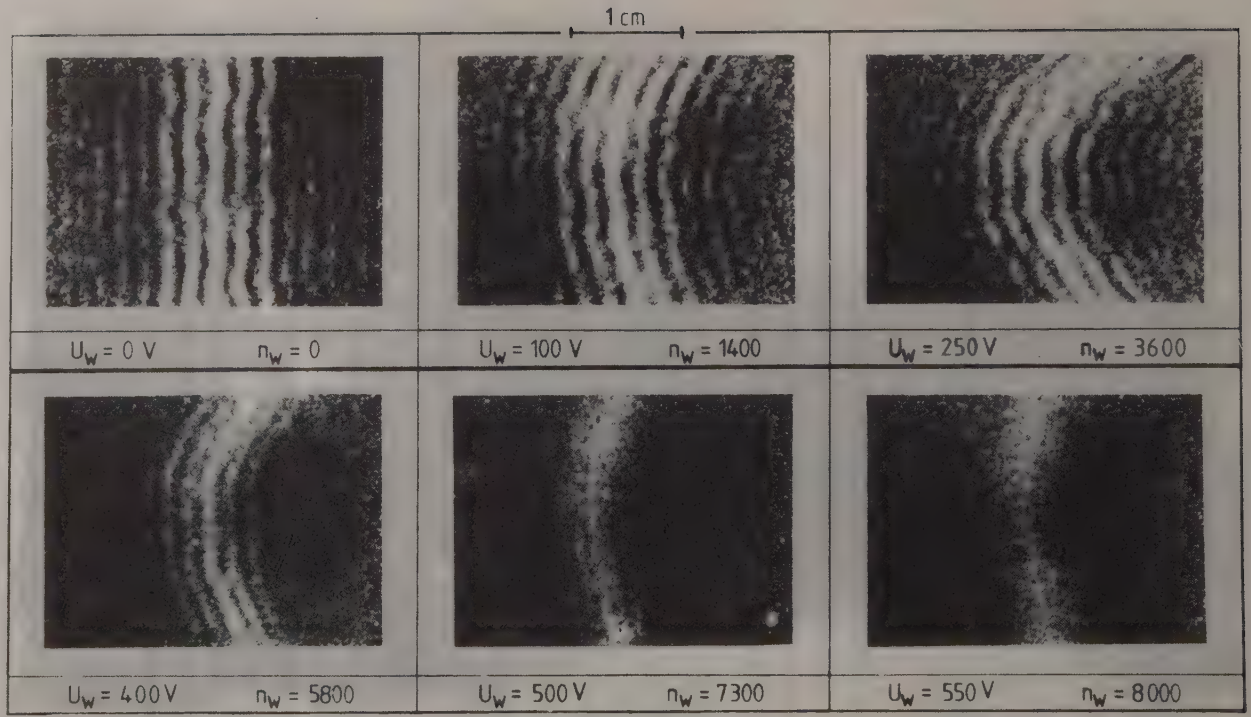


Fig.: IV/1 Biprisma-Interferenzen bei ansteigender Wien-Spannung

Der Maßbalken bezieht sich auf die Ebene des Bildverstärkers

U_W: Spannung am Wien-Kondensator

n_W: Die vom Wien-Filter erzeugte Wegdifferenz in Vielfachen der Wellenlänge

Beschleunigungsspannung U_B = 5575 V, Fadenspannung U_F = 0,52 V

Brennweite f_{II} = 4,5 cm, Streifenabstand in L_{III} $\approx$ 5 m

IV-0 Der Versuch wurde bei verschiedenen Beschleunigungs- (1800 V - 5000 V), Faden- und Linsenspannungen mit dem qualitativ gleichen Ergebnis wiederholt.

Da die zum Verschwinden des Kontrastes benötigte Wien-Spannung U_W mit zunehmender Beschleunigungsspannung U_B steigt, begrenzt die von der elektrischen Versorgung des Wien-Filters lieferbare Spannung von höchstens 500 V (vergl. I-2) die Beschleunigungsspannung auf $\approx$ 5000 V.

IV-1 ABSTAND DER WELLENPAKETE (1. Erklärung)

1. Gleiche elektronenoptische Weglängen

Wir vergleichen die elektronenoptischen Weglängen $\int n ds$ längs zweier geometrisch-optischer Elektronenbahnen x(y), die in der x, y-Ebene zueinander spiegelsymmetrisch in Bezug auf die y, z-Ebene verlaufen.

Analog zur Optik definiert man in der Elektronenoptik einen elektronenoptischen Brechungsindex (Glaser 1933), der in nicht-relativistischer Näherung in der Form

$$(4\text{-}1) \quad n(\vec{r}, \frac{\vec{v}}{v}) = \sqrt{\frac{\phi(\vec{r})}{U_B}} - \sqrt{\frac{e}{2mU_B}}\, \vec{A}(\vec{r})\, \frac{\vec{v}}{v}$$

geschrieben werden kann. Dabei ist im Wien-Filter

$$(4\text{-}2) \quad \sqrt{\frac{\phi(\vec{r})}{U_B}} = \sqrt{1 - \frac{Ex}{U_B}} = 1 - \frac{Ex}{2U_B} + \mathcal{O}(x^2)$$

und

$$(4\text{-}3) \quad \vec{A} = (0, Bx, 0) \quad ;$$

Es ist nicht gleichgültig, ob man das Vektorpotential $\vec{A}$ durch (4-3), durch $\vec{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$ oder eine andere Eichung beschreibt. Es ist vielmehr notwendig, $\vec{A}$ so zu definieren, daß in der Ein- und Austrittsfläche in den Wien-Filter, d.h. für $y = y_W \pm L/2$ die Komponente A_x verschwindet. Bei jeder anderen Eichung könnte man nicht für $y < y_W - L/2$ und $y > y_W + L/2$, d.h. außerhalb des Wien-Filters $\vec{A} = 0$ setzen, ohne daß in der Ein- und Austrittsfläche die Tangentialkomponente von $\vec{A}$ unstetig und damit die Flußdichte $\vec{B}$ unendlich wird. Mit (4-2) und (4-3) wird

$$(4\text{-}4) \quad n = 1 - \frac{Ex}{2U_B} - \sqrt{\frac{e}{2mU_B}}\, Bx + \mathcal{O}(x^2)$$

IV-1 Bei Einhaltung der Wien-Bedingung (3-8) heben die beiden in der x-Koordinate linearen Terme einander weg, und man erhält für den Brechungsindex

$$(4\text{-}5) \qquad n = 1 + \mathcal{O}(x^2)$$

Für symmetrische Bahnen tritt also im Wien-Filter keine optische Weglängen- und damit auch keine Phasendifferenz auf. In der Tat verändern die Interferenzstreifen ihre Lage nicht, wenn man die Anspannung des Wien-Filters variiert, solange man dabei das Magnetfeld ständig so nachregelt, daß die Wien-Bedingung eingehalten wird.

2. Differenz der Gruppengeschwindigkeiten

Die Gruppengeschwindigkeiten eines Wellenpaketes ist bekanntlich gleich der klassischen Teilchengeschwindigkeit v. Wie wir bereits in (3-11) gesehen haben, ist diese für die beiden symmetrischen Teilstrahlen verschieden, und zwar haben sie eine Geschwindigkeitsdifferenz

$$(4\text{-}6) \qquad \Delta v = \frac{1}{2} \frac{v \cdot E}{U_B} \Delta x(U_w)$$

mit $\Delta x(U_W)$ aus (3-19). Während der Laufzeit im Filter $T = L/v_0$ führt diese Geschwindigkeitsdifferenz Δv zu einem longitudinalen Abstand ("Paketabstand")

$$(4\text{-}7) \qquad \Delta y = T \Delta v = \frac{1}{2} \frac{EL}{U_B} \Delta x(U_w)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{L}{a} \frac{U_w}{U_B} \Delta x(U_w)$$

der Schwerpunkte der beiden Wellenpakete.

IV-1 Beim Anspannen des Filters werden also die einander kohärent überlagernden Bereiche der beiden Wellenzüge kürzer und damit der Kontrast des Interferenzfeldes schwächer. Wird der Abstand Δy der Wellenpakete größer als ihre Kohärenzlänge nach (2-35)

$$\Delta l = \frac{1}{\Delta k} \quad , \tag{4-8}$$

so sind die Wellenzüge nicht mehr interferenzfähig und der Kontrast der Interferenzstreifen verschwindet.

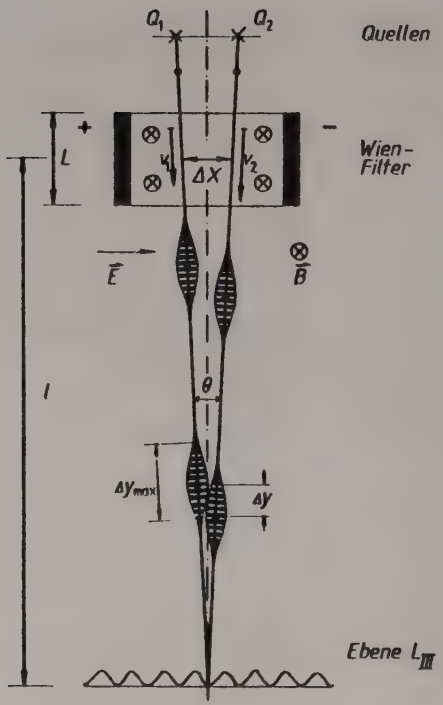


Fig.: IV/2 Das angespannte Wien-Filter erzeugt einen longitudinalen Abstand der Wellenpakete.

V-1

Im Gegensatz zu der Begrenzung der Zahl der beobachtbaren Interferenzstreifen infolge begrenzter Längenkohärenz, die wir in II-2 diskutiert haben, wird hier die Kohärenzlänge nicht durch den Farbfehler der Linse L_{II} beeinträchtigt, da wir ja den Streifenkontrast in der Mitte des Interferenzfeldes bei $\xi = 0$ beobachten. Dort (bei $\xi = 0$) bleibt der Farbfehler der Linse L_{II} ja nach (2-24) ohne Wirkung auf den Streifenkontrast (siehe auch IV-2/2).

3. Längenkohärenzbedingung mit Wien-Filter (aus Paketabstand)

Mit dem Paketabstand Δy nach (4-7) und der Kohärenzlänge Δl nach (4-8) erhält die Längenkohärenzbedingung für das Biprisma mit Wien-Filter die Form $\Delta y / \Delta l < 1$
Wegen (3-19) ist

$$(4\text{-}9)\quad \frac{\Delta y}{\Delta l} = \frac{1}{2}\frac{L}{a}\frac{U_V}{U_B}\,\Delta k\,\Delta X(U_W)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{L}{a}\frac{U_V}{U_B}\,\Delta k\,\frac{l}{s_0(U_W)}\,\lambda$$

Die Längenkohärenzbedingung für das Biprisma mit Wien-Filter kann also in der Form

$$(4\text{-}10)\quad \widetilde{\pi}\,\frac{L}{a}\frac{\Delta k}{k}\frac{U_V}{U_B}\,\frac{l}{s_0(U_W)} < 1$$

geschrieben werden.

4. Möglichkeiten zur Messung des Paketabstandes

Eine erste Möglichkeit, den Paketabstand (4-7) und damit die Kohärenzlänge Δy_{max} durch die Messung derjenigen Wien-Spannung $U_W = U_{WK}$ zu bestimmen, für die der Streifenkontrast verschwindet, besteht darin, den mittleren Bündelabstand $\Delta x(U_W)$ aus der Abmessung des Strahlenganges zu berechnen.

V-1 Setzt man in (4-7) den aus (3-19) folgenden Wert für $\Delta x(U_W)$ ein, so erhält man

$$(4\text{-}11)\quad \Delta y_{max} = \frac{1}{2}\frac{L}{a}\frac{U_{WK}}{U_B}\Delta X(\sigma) + \frac{1}{8\alpha}\frac{L^2}{a^3}\left(\frac{U_{WK}}{U_B}\right)^3\left(\Delta X(\sigma)\right)^2$$

$$=: \lambda\left(\varrho_0 U_{WK} + \varkappa U_{WK}^3\right) .$$

Der erste Summand auf der rechten Seite stellt den überwiegenden Beitrag zur Abhängigkeit des maximalen Paketabstandes Δy_{max} von der Wien-Spannung U_{WK} dar. Der zweite Summand ist eine im allgemeinen kleine Korrektur.

Für $\Delta x(o)$ gilt dabei nach (3-1) und (3-3)

$$(4\text{-}12)\quad \Delta X(\sigma) = 2\gamma\,\frac{l\,p' f_{II}}{q'(w+l) - (w+l+q')\,f_{II}} .$$

Hat man also die Größen γ, f_{II}, p', w, l, q', L und a gemessen und daraus nach (3-17) auch α bestimmt, so kennt man die Koeffizienten der Abhängigkeit $\Delta y(U_W)$ in (4-11). Diese Bestimmung der in (4-11) definierten Koeffizienten

$$(4\text{-}13)\quad \varrho_0 := \frac{1}{2}\frac{L}{a}\frac{\Delta X(\sigma)}{\lambda\, U_B} \quad , \quad \varkappa := \frac{1}{8\alpha}\frac{L^2}{a^3}\frac{\Delta X(\sigma)^2}{\lambda\, U_B^3}$$

ist ziemlich ungenau. Wie wir später sehen werden, ist es aber möglich, ϱ_0 und $\varkappa$ durch Messung einer "Streifenempfindlichkeit" zu bestimmen, die ein Maß dafür ist, wieviele Streifen über die Mitte des Interferenzfeldes bei $\xi = 0$ laufen, wenn man die elektrische Ablenkung im Wien-Filter bei konstant gehaltener magnetischer Ablenkung variiert.

IV-2 DISPERSION DES WIEN-FILTERS (2. Erklärung)

1. Längenkohärenz und Streifenkontrast mit Wien-Filter

Wie in II-1 untersuchen wir die Abhängigkeit des Streifenkontrastes von der Längenkohärenz durch Mittelung über eine Verteilung $F_2(k)$ über die Wellenzahl k, welche die in (2-8) und (2-9) definierten Eigenschaften hat:

$$(4\text{-}14)\quad J(\xi) = \int i(\xi,k)\, F_2(k)\, dk$$

$$= i_o \int \left(1 + K' \cos\left(2\pi \frac{\xi - \xi_w(k)}{s(k)}\right)\right) F_2(k)\, dk$$

$i(\xi,k)$ ist die "monochromatische" Intensitätsverteilung, die von den Elektronen der Wellenzahl k allein erzeugt würde. Der Faktor K' vor der Cosinusfunktion kennzeichnet die von ξ unabhängige Kontrastminderung nach (2-25) infolge begrenzter Winkelkohärenz. Wie in II-1 ist s(k) der Streifenabstand, der allerdings nach (3-18) selbst noch schwach von der Anspannung des Wien-Filters abhängt. Im Gegensatz zu II-1 tritt hier eine Wien-Ablenkung $\xi_w(k)$ auf, welche angibt, um wieviel das zentrale Maximum, d.h. der Ort in der Interferenzebene, an dem die elektronenoptische Weglängendifferenz verschwindet, vom Wien-Filter verschoben wird. Wenn für $k = k_0$ die Wien-Bedingung erfüllt ist, gilt

$$(4\text{-}15)\quad \xi_o := \xi_w(k_o) = \sigma \quad ;$$

Wie in II-1 linearisieren wir das Argument der Cosinusfunktion in (4-14) in Bezug auf die Abweichung $k - k_0$ vom Mittelwert k_0:

IV-2

$$(4\text{-}16)\quad 2\pi\frac{\xi-\xi_w(k)}{s(k)} = 2\pi\frac{\xi-\xi_o}{s_o} - 2\pi\frac{\xi-\xi_o}{s_o^2}(k-k_o)\left.\frac{ds}{dk}\right|_{k=k_o} - 2\pi\frac{1}{s_o}(k-k_o)\left.\frac{d\xi_w}{dk}\right|_{k=k_o}$$

Definiert man die "Dispersion" des Wien-Filters durch

$$(4\text{-}17)\quad D := \left.\frac{d\xi_w}{dk}\right|_{k=k_o} ;$$

so ergibt die Integration in (4-14)

$$(4\text{-}18)\quad J(\xi) = i_o\left\{1+K'\cos\left(2\pi\frac{\xi-\xi_o}{s_o}\right)\cdot\exp\left[-2\left(\pi\frac{\Delta k}{s_o}\left(\frac{\xi-\xi_o}{s_o}\left.\frac{ds}{dk}\right|_{k=k_o}+D\right)\right)^2\right]\right\} .$$

Im Sonderfall $\xi_w(k) \equiv 0$, d.h. bei abgeschaltetem Wien-Filter, erhält man mit $\frac{1}{s}\left.\frac{ds}{dk}\right|_{k=k_o} = \frac{1}{k_o}(1-\nu)$ wie in (2-20) und (2-21) wieder

$$(4\text{-}19)\quad J(\xi) = i_o\left[1+K'\cos\left(2\pi\frac{\xi}{s_o}\right)\cdot\exp\left(-2\left(\pi\frac{\Delta k}{s_o}\frac{\xi}{k_o}(\nu-1)\right)^2\right)\right]$$

wie in (2-23).

IV-2 Ist jedoch das Wien-Filter eingeschaltet, so folgt aus (4-18) für den Kontrast

$$(4\text{-}20)\quad K(\xi) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = K' \exp\left(-2\left(\pi \frac{\Delta k}{s_0}\left(\frac{\xi - \xi_0}{s_0}\left.\frac{ds}{dk}\right|_{k=k_0} + D\right)\right)^2\right)$$

Wie bei der Aufspaltung eines Wellenpaketes in einen Phasen- und einen Amplitudenfaktor ist nach (4-18) die Stromdichtenverteilung $I(\xi)$ in der Beobachtungsebene durch einen rasch mit ξ veränderlichen "Phasenfaktor" $\cos \frac{2\pi}{s_0}(\xi - \xi_0)$ und einen langsam veränderlichen "Amplitudenfaktor" $K(\xi)$ nach (4-20) gekennzeichnet. Der Phasenfaktor hat sein zentrales Maximum bei $\xi = \xi_0$, d.h. bei Erfüllung der Wien-Bedingung (4-15) in der Mitte $\xi = 0$ der Beobachtungsebene und sein Maximum n-ter Ordnung bei $\xi = \xi_0 + n s_0$. Der Amplitudenfaktor $K(\xi)$ hat sein Maximum nur bei ausgeschaltetem Wien-Filter bei $\xi = \xi_0$. Mit zunehmender Anspannung des Wien-Filters wird es lateral verschoben, und zwar liegt es bei

$$(4\text{-}21)\quad \langle \xi \rangle = \frac{\int \xi K(\xi)\, d\xi}{\int K(\xi)\, d\xi} = \xi_0 - s_0 D \Big/ \left.\frac{ds}{dk}\right|_{k=k_0}$$

Die durch die Standard-Abweichung

$$(4\text{-}22)\quad \sqrt{\langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2} = \frac{s_0^2}{2\pi \Delta k \left.\frac{ds}{dk}\right|_{k=k_0}}$$

mit $$\langle \xi^2 \rangle = \frac{\int \xi^2 K(\xi)\, d\xi}{\int K(\xi)\, d\xi}$$

IV-2

gekennzeichnete "Breite des Amplitudengebirges" wird auch bei eingeschaltetem Wien-Filter durch den Farbfehler der Linse L_{II} stark beeinflußt, und zwar wird die Breite wie in (2-27) um den Faktor $|1 - \gamma|$ verringert.

2. Einfluß der Linse L_{II}

Beobachtet man jedoch bei Einhaltung der Wien-Bedingung (4-15) das zentrale Maximum bei $\xi = 0$, so gilt nach (4-20) für dessen Kontrast

$$(4\text{-}23) \qquad K(\sigma) = K' \exp\left(-2\left(\pi \frac{\Delta k}{s_0} D\right)^2\right) .$$

Sind die Dispersion D und die Streifenbreite s_0 in Abhängigkeit von der Anspannung U_W des Wien-Filters bekannt, so kann man aus der Abnahme des Kontrastes (4-23) in Abhängigkeit von U_W auf die Standardabweichung Δk der Verteilungsfunktion $F_2(k)$ schließen, ohne dabei auf die Beiträge des Abbildungssystems zum Wert von $(ds/dk)_{k=k_0}$, d.h. auf die Farbfehler der Linsen Rücksicht nehmen zu müssen.

Mit der von G. Möllenstedt vorgeschlagenen Kombination von elektrostatischem Bisprisma und Wien-Filter ist es also möglich, chromatische Parameter der Zweistrahleninterferenz (z.B. Längenkohärenz, Kontrastverlauf) zu messen, ohne den Einfluß der Eigenschaften der elektronenoptischen Linsen, insbesondere ihren Farbfehler, berücksichtigen zu müssen.

3. Längenkohärenzbedingung mit Wien-Filter (aus Dispersion)

Differenziert man die Gleichungen (3-7) nach der Zeit t, setzt $t = L/v$ ein und linearisiert in Bezug auf die kleine Größe $e \cdot B \cdot l / m\,v$, so erhält man für die Ausfallsrichtung der Elektronenbahn, die in das Wien-Filter längs der y-Achse eintritt,

$$(4\text{-}24) \qquad \frac{\dot{x}}{v_0} = -\frac{eL}{m v_0}\left(\frac{E}{v_0} + B\right)$$

IV-2 Daraus folgt für die Wien-Ablenkung ξ_W in der Beobachtungsebene im Abstand l hinter der Mitte des Wien-Filters (siehe Fig.: IV/3)

$$(4\text{-}25)\quad \xi_W = \xi_E + \xi_M = -\frac{e l L}{m v_0}\left(\frac{E}{v_0} + B\right)$$

$$= -\frac{e l L}{\hbar k}\left(\frac{E m}{\hbar k} + B\right)$$

Nach (4-17) folgt daraus für die Dispersion

$$(4\text{-}26)\quad D = \frac{e l L}{\hbar k_0^2}\left(\frac{2 E m}{\hbar k_0} + B\right)$$

$$= -\frac{1}{k_0}\left(2\xi_E(k_0) + \xi_M(k_0)\right)$$

Insbesondere gilt für die Dispersion des abgeglichenen Wien-Filters ($\xi_E + \xi_M = 0$)

$$(4\text{-}27)\quad D = \frac{e m}{\hbar} l L \frac{E}{\hbar k_0^3} = \frac{1}{2}\frac{L}{a} l \frac{1}{k_0}\frac{U_W}{U_B}$$

$$= -\frac{1}{k_0}\xi_E(k_0)$$

Einsetzen von (4-25) und (4-26) in (4-18) ergibt

$$(4\text{-}28)\quad J(\xi) = i_0\left\{1 + K'\cos\frac{2\pi}{s_0}(\xi - \xi_E - \xi_M)\right.$$

$$\left.\cdot \exp\left(-2\left[\ln 2\,\frac{\Delta k}{s_0 k_0}\left(\frac{\xi - \xi_E - \xi_M}{s_0} k_0 \frac{ds}{dk}\Big|_{k=k_0} - 2\xi_E - \xi_1\right)\right]^2\right)\right\}$$

IV-2 Insbesondere gilt also für das abgeglichene Wien-Filter

$$(4\text{-}29)\quad J(\xi) = i_0\left\{1 + K'\cos 2\pi\frac{\xi}{s_0} \cdot \exp\left(-2\left[\pi\frac{\Delta k}{s_0 k_0}\left(\frac{k_0\xi}{s_0}\frac{ds}{dk}\Big|_{k=k_0} - \xi_E\right)\right]^2\right)\right\}$$

Nach (4-23) nimmt der Kontrast infolge begrenzter Längenkohärenz um weniger als der Faktor exp $(-\frac{1}{2})$ ab, wenn

$$(4\text{-}30)\quad 2\pi\frac{\Delta k}{s_0} D = \pi\frac{L}{\alpha}\frac{\Delta k}{k_0}\frac{u_w}{u_B}\frac{l}{s_0(u_w)} < 1$$

Diese Ungleichung stimmt mit (4-10) überein. Die beiden Herleitungen dieser Längenkohärenzbedingung in IV-1 und IV-2 unterscheiden sich im Grunde nur darin, daß in IV-1 die Mittelung über k an den beiden einzelnen Wellenpaketen durchgeführt wird und diese anschließend zur Interferenz gebracht werden, während in IV-2 erst die unendlich ausgedehnten monochromatischen Wellenzüge zur Interferenz gebracht werden und erst dann die Mittelung über die Wellenzahl k durchgeführt wird. Es ist insofern nicht verwunderlich, daß beide Herleitungen dasselbe Ergebnis liefern.

Aus Gleichung (4-28) kann man direkt ablesen, wie sich die Interferenzstreifen und das Konstrastmaximum bei Variation von ξ_E und ξ_M verschieben. Das Maximum nullter Ordnung liegt bei demjenigen Wert von ξ, für den das Argument des Phasenfaktors $\cos\frac{2\pi}{s_0}(\xi - \xi_E - \xi_M)$ verschwindet, d.h. bei

$$(4\text{-}31)\quad \xi_0 = \xi_E + \xi_M$$

IV-2 Dagegen liegt das Kontrastmaximum (die Nullstelle des Arguments des Amplitudenfaktors) bei

$$(4\text{-}32)\quad \langle \xi \rangle = \xi_E + \xi_M + \frac{2\xi_E + \xi_M}{(ds/dk)_{k-k_0}} \frac{S_0}{k_0} \cdot$$

Insbesondere erhält man für das abgeglichene Wien-Filter das Kontrastmaximum bei

$$(4\text{-}33)\quad \langle \xi \rangle = \frac{\xi_E}{(ds/dk)_{k-k_0}} \frac{S_0}{k_0} \quad ,$$

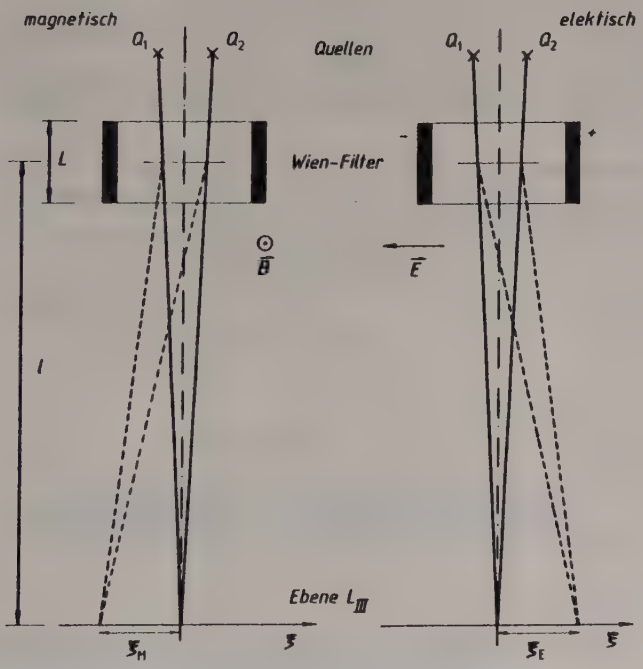


Fig.: IV/3 Magnetische und elektrische Ablenkung
Geometrische Verhältnisse und Feldrichtungen für beide Ablenkungen getrennt.

IV-1 4. Anschauliche Wirkung des Wien-Filters

Eine anschauliche Vorstellung von der Wirkung des Wien-Filters auf ein Interferenzfeld vermittelt Fig.: IV/4.

Der Intensitätsverlauf eines vollständigen Interferenzfeldes ist schematisch angedeutet.

Die Einhüllende dieses Intensitätsverlaufs liegt ohne Wien-Filter symmetrisch zur optischen Achse.
Der zwischen den Schattengrenzen (vergl. II-2/1) beobachtbare Bereich umfaßt unter typischen Bedingungen weniger als 5% des gesamten Interferenzfeldes (Keller, 1961).

Mit Anspannung des jeweils abgeglichenen Wien-Filters verschiebt sich nach (4-33) die Einhüllende. Ist $(ds/dk)_{k=k_0} > 0$, so erfolgt diese Verschiebung in Richtung der elektrischen Ablenkung, andernfalls in entgegengesetztem Sinn. Auf der einen Seite verschwinden Interferenzstreifen, auf der anderen kommen neue hinzu, ohne daß die Interferenzstreifen selbst sich bewegen.

Erhöht man also die Anspannung des abgeglichenen Wien-Filters, so nimmt innerhalb des Beobachtungsbereiches, der in seiner relativen Größe stark übertrieben gezeichnet ist, der Kontrast monoton ab, bis er schließlich ganz verschwindet.

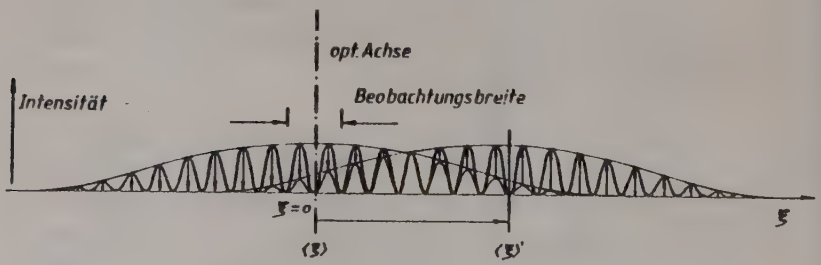


Fig.: IV/4 Wirkung des Wien-Filters auf das Interferenzfeld:
Das Kontrastmaximum $\langle \xi \rangle$ wandert unter dem Einfluß des Filters aus, so daß der Streifenkontrast an der Stelle $\xi = 0$ allmählich abnimmt.

V MESSUNG DER KOHÄRENZLÄNGE

V-0 VORBEMERKUNG

V-1 KOHÄRENZLÄNGE ÜBER GEOMETRIE DES STRAHLENGANGES

1. Messvorgang
2. Formeln und zu messende Größen
   (Zusammenstellung)
3. Fehlerabschätzung
4. Messergebnisse
   - Erläuterungen der Messtabellen
   - Messtabellen A, B, C

V-2 KOHÄRENZLÄNGE ÜBER STREIFENEMPFINDLICHKEIT

1. Bestimmung der Koeffizienten ϱ_0 und $\varkappa$ aus der
   Streifenempfindlichkeit
2. Messung der Streifenempfindlichkeit
3. Messprobleme, Fehlerabschätzung
4. Messergebnisse
   - Erläuterung der Messtabelle
   - Messtabelle D

V-0 VORBEMERKUNG

Die Möglichkeit mittels des Wien-Filters die Kohärenzlänge der Elektronen zu messen, ergibt sich aus den in (4-11) hergeleiteten Zusammenhang zwischen der Wien-Spannung U_w und dem Paketabstand Δy. Gelingt es die Parameter ϱ_0 und $\varkappa$ in (4-11) zu bestimmen, so ergibt sich mit derjenigen Wien-Spannung U_{wK}, bei der der Kontrast gerade verschwindet, ein Paketabstand Δy_{max}, der im Rahmen der Meßgenauigkeit der Kohärenzlänge entspricht.

Eine erste Möglichkeit die Parameter ϱ_0 und $\varkappa$ zu bestimmen ist, sie aus der Geometrie des Strahlenganges zu berechnen. Diese Methode ist anschaulich,aber ungenau.

Eine zweite Möglichkeit, die Parameter in (4-11) zu bestimmen, ist die Messung der "Streifenempfindlichkeit", eine Funktion die angibt, wieviel Streifen pro Spannungsänderung bei festgehaltenem Magnetstrom durch das Beobachtungsfeld bewegt werden. Diese Funktion läßt sich recht genau vermessen. Die Fehlerschranken für die so gemessene Kohärenzlänge sind deshalb kleiner.

Im folgenden werden beide Möglichkeiten beschrieben und die gewonnenen Meßwerte dargestellt.

V-1 KOHÄRENZLÄNGE ÜBER GEOMETRIE DES STRAHLENGANGES

1. Meßvorgang

Zunächst wird ein gut zu beobachtendes kontrastreiches Interferenzfeld erzeugt. Die zugehörigen Parameter des Interferometers bleiben dann während der Messung unverändert.

Die Anspannung des Wien-Filters wird nun durch Vergrößerung der Spannung U_W und des Spulenstroms erhöht und zwar so, daß das Interferenzfeld im Beobachtungsbereich bleibt. Dadurch ist gewährleistet, daß das Wien-Filter sich in seinem abgeglichenen Zustand befindet.

Die Wien-Spannung U_{WK}, bei der der Kontrast gerade verschwindet, wird als Meßwert festgehalten.

Zusammen mit den vorher bestimmten geometrischen Daten des Strahlenganges ergibt sich daraus mit (4-11) die Kohärenzlänge.

2. Formeln und zu messende Größen (Zusammenstellung)

Zur Berechnung des maximalen Paketabstandes

$$\Delta y = \lambda \left(g_0 U_{WK} + \varepsilon U_{WK}^3 \right) \qquad (4\text{-}11)$$

$$g_0 = \frac{1}{2} \frac{L}{a} \frac{\Delta x(\sigma)}{\lambda U_B} \quad , \quad \varepsilon = \frac{1}{8\alpha} \frac{L^2}{a^3} \frac{\Delta x(\sigma)^2}{\lambda U_B^3} \qquad (4\text{-}13)$$

werden benötigt:

- Der mittlere Bündelabstand im entspannten Wien-Filter mit (1-1) und (4-12)

$$\Delta x(\sigma) = 2 \gamma_0 \frac{U_f}{U_B} \frac{l p' f_W}{q'(w+l) \cdot (w+l+q') f_W}$$

V-1

- Der Winkelabstand α der Quellen Q_1 und Q_2 vom Zentrum des Wien-Filters aus gesehen (siehe Fig.: I/1) aus (3-17) ergibt sich mit (1-5), (1-4) und (1-1)

$$\alpha = 2\gamma_0 \frac{U_F}{U_B} \frac{-p' f_{II}}{(w+q')f_{II} - wq'}$$

- Die geometrischen Daten des Strahlenganges p', q', w und l sind in I-0/6. zusammengestellt.
- Die Umlenkkonstante γ_0 ist in I-1/2. angeführt.
- Die geometrischen Daten des Wien-Kondensators, die wirksame Länge L und der Plattenabstand a sind aus I-2/2. zu entnehmen.
- Die Beschleunigungsspannung U_B, die Fadenspannung U_F und die Brennweite der Linse f_{II} werden im Experiment als Parameter einer Meßreihe entweder vorgegeben, oder schrittweise verändert, wobei die Brennweite f_{II} als Funktion der Linsenanspannung aus Fig.: I/2 zu entnehmen ist.

3. Fehlerabschätzungen

Die Fehlererwartung für die Messung der Wegdifferenz wurde numerisch berechnet. Dazu werden zunächst die zufälligen Fehler der zwölf Größen abgeschätzt, die zur Bestimmung der Wegdifferenz nötig sind. Mit Hilfe der Ausdrücke aus V-1/2. werden daraus die einzelnen prozentualen Fehlerbeiträge bestimmt und zum Gesamtfehler addiert. In der folgenden Tabelle sind die Fehlerbeiträge zu Gruppen zusammengefaßt.

Einzelne Größen		Fehlerbeitrag
Abstände im Strahlengang p',q',w,l :		7 %
Biprisma	R, r_0 :	7 %
Wien-Filter	L,a :	8 %
Spannungen	U_B, U_F, U_W :	0,2 %
Brennweite	f_{II} :	8 %
Die Fehlererwartung für y_{max} ist die		
Summe der Fehlerbeiträge:		30 %

V-1 Weiter ist zu beachten, daß bei der Bestimmung des maximalen Paketabstandes Δy_{max} das Verschwinden des Kontrastes subjektiv bestimmt werden muß, was einen weiteren Fehlerbeitrag von mindestens 10 % bedeutet.

Wegen der sehr großen Gesamtfehlererwartung von 40 % für diese Messung der Kohärenzlänge ist damit nur eine qualitative Überprüfung der theoretischen Ansätze möglich.

4. Meßergebnisse

Erläuterungen zu den Meßtabellen A, B, C:

Aus der Vielzahl der durchgeführten Messungen wurden drei typische Meßreihen ausgewählt und in den Tabellen A, B, C zusammengefaßt. Darin sind zunächst die Größen U_B, λ , f_{II} aufgeführt, die für die ganze Meßreihe gleich sind. Die Einzelmessungen selbst sind im unteren Teil der Tabelle zusammengefaßt. Neben dem Endergebnis der Einzelmessungen, der Kohärenzlänge,sind noch eine Reihe von Werten aus Zwischen- und Zusatzrechnungen aufgeführt, die folgend kurz erläutert werden.

Fadenspannung U_F:

Sie bestimmt den Umlenkwinkel γ des Biprismas und beeinflußt damit den mittleren Bündelabstand im Wien-Filter. Bei den aufgeführten Meßreihen wurde die Fadenspannung von Messung zu Messung erhöht.

Maximale Wien-Spannung U_{WK}:

Diejenige Spannung am Wien-Kondensator, die bei abgeglichenem Filter den Kontrast gerade zum Verschwinden bringt.

Wien-Brennweite f_W:

Brennweite der Zylinderlinse, die das abgeglichene Wien-Filter für den Strahlengang darstellt. Diese Linsenwirkung modifiziert alle weiteren in der Tabelle aufgeführten Größen.

V-1 Mittlerer Bündelabstand Δx: (3-19)

Abstand, den zwei in der zweiten Interferenzebene einander überlagernden Teilstrahlen im Filter hatten.

Streifenabstand s: (3-18)

Abstand der Interferenzmaxima in der zweiten Interferenzebene.

Maximaler Paketabstand (Kohärenzlänge) Δy_{max}: (4-11)

Paketabstand, der das mit U_{WK} angespannte Wien-Filter erzeugt. Da bei dieser Anspannung der Interferenzkontrast gerade verschwindet, entspricht diese Größe im Rahmen der Meßgenauigkeit der Kohärenzlänge.

n_W:

Die Kohärenzlänge gemessen in Vielfachen der Wellenlänge.

Energiebreite der Elektronenquelle ΔE_B:

Breite des Energiespektrums der verwendeten Elektronenquelle, wie sie sich aus der gemessenen Kohärenzlänge berechnen läßt.
Es gilt nach (2-9) mit

$$\frac{\Delta E_B}{e U_B} = 2 \frac{k - k_0}{k_0} \quad \text{und} \quad n_W = \frac{\Delta y}{\lambda} = \frac{1}{\lambda \Delta k}$$

$$\Delta E_B = \frac{e U_B}{\pi n_W} \sqrt{-2 \ln t}$$

Der Bruchteil t, auf den der ursprüngliche Kontrast bis zur Messung abgesunken ist, konnte nicht gemessen werden. Die Energiebreite wurde mit zwei t-Werten berechnet, die eine obere bzw. untere Grenze für den tatsächlichen t-Wert darstellen.

M E S S T A B E L L E - A -

Beschleunigungs - Spannung	U_B = 5o25 V
Wellenlänge	λ = o,173 Å
Brennweite der Linse L_{II}	f_{II} = 4,1 cm

Nummer der Messung			1.	2.	3.	4.
Faden - Spannung	U_F	V	.5o	.72	.85	1.o5
maximale Wien - Spannung	U_{WK}	V	334	252	2o8	137
Wien - Brennweite	f_W	m	4.94	8.68	12.74	29.37
mittlerer Bündelabstand	Δx	µm	.93	1.34	1.58	1.94
Streifenabstand	s_o	µm	5.19	3.61	3.o6	2.49
Kohärenzlänge	Δy_{max}	µm	.o91	.o99	.o96	.o78
$n_W = \Delta y_{max} / \lambda$			524o	568o	552o	448o
Energiebreite t = 1/2	ΔE_B	eV	.34	.33	.34	.42
t = 1/1o	ΔE_B	eV	.66	.6o	.62	.77

MESSTABELLE -B-

Beschleunigungs - Spannung	U_B = 5025 V
Wellenlänge	λ = 0,173 Å
Brennweite der Linse L_{II}	f_{II} = 3,2 cm

Nummer der Messung			1.	2.	3.	4.	5.
Faden - Spannung	U_F	V	.67	.9o	1.o1	1.18	1.43
maximale Wien - Spannung	U_{WK}	V	423	37o	34o	313	25o
Wien - Brennweite	f_W	m	3.o8	4.o3	4.77	5.63	8.82
mittlerer Bündelabstand	Δx	µm	.92	1.24	1.38	1.61	1.95
Streifenabstand	s_0	µm	5.23	3.91	3.49	2.99	2.48
Kohärenzlänge	Δy_{max}	µm	.11	.13	.14	.15	.14
$n_W = \Delta y_{max} / \lambda$			659o	77oo	793o	851o	82oo
Energiebreite t = 1/2	ΔE_B	eV	.29	.25	.24	.22	.23
t = 1/1o	ΔE_B	eV	.52	.45	.43	.4o	.42

M E S S T A B E L L E - C -

Beschleunigungs - Spannung	U_B = 5o25 V
Wellenlänge	λ = o,173 Å
Brennweite der Linse L_{II}	f_{II} = 3,75 cm

Nummer der Messung			1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Faden - Spannung	U_F	V	.77	.84	.88	.95	1.oo	1.47	1.58
maximale Wien - Spannung	U_{WK}	V	37o	355	331	298	272	2oo	161
Wien - Brennweite	f_W	m	4.o4	4.38	5.o3	6.21	7.45	13.78	21.27
mittlerer Bündelabstand	Δx	µm	1.29	1.4o	1.47	1.58	1.66	2.43	2.61
Streifenabstand	s_0	µm	3.76	3.45	3.3o	3.o6	2.91	1.99	1.85
Kohärenzlänge	Δy_{max}	µm	.14	.15	.14	.14	.13	.14	.12
$n_W = \Delta y_{max} / \lambda$			8o2o	839o	818o	793o	761o	819o	7o8o
Energiebreite t = 1/2	ΔE_B	eV	.24	.23	.23	.24	.25	.23	.27
t = 1/1o	ΔE_B	eV	.43	.41	.42	.43	.45	.42	.49

V-2 KOHÄRENZLÄNGE ÜBER STREIFENEMPFINDLICHKEIT

1. Bestimmung der Koeffizienten s_0 und α aus der "Streifenempfindlichkeit"

Definieren wir die Ordnung n eines Interferenzstreifens als das durch 2π dividierte Argument der Cosinus-Funktion in (4-28), d.h.:

$$n = \frac{\xi - \xi_E - \xi_M}{s_0(U_W)} \quad , \tag{4-34}$$

so ändert sich diese Ordnung n, wenn U_W und damit ξ_E variiert wird, aber gleichzeitig ξ und ξ_M festgehalten werden. Wir definieren unter diesen Bedingungen eine Streifenempfindlichkeit

$$s(U_W) := \frac{dn}{dU_W} \tag{4-35}$$

$$= -\frac{1}{s_0(U_W)} \frac{d\xi_E}{dU_W} - \frac{\xi - \xi_E - \xi_M}{s_0^2(U_W)} \frac{ds_0}{dU_W}$$

Geht man bei dieser Variation von einem zunächst abgeglichenen Wien-Filter aus, so verschwindet der zweite Summand auf der rechten Seite, und die Streifenempfindlichkeit wird wegen (4-27) und (3-18)

$$s(U_W) = \frac{1}{2} \frac{L}{a} \frac{l}{U_B s_0(U_W)} \tag{4-36}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{L}{a} \frac{l}{U_B s_0(\sigma)} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{L}{a^2} \frac{l\lambda}{\alpha s_0(\sigma)} \frac{U_W^2}{U_B^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{L}{a} \frac{\Delta x(\sigma)}{\lambda U_B} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{L}{a^2} \frac{\Delta x(\sigma)}{\alpha} \frac{U_W^2}{U_B^2}\right)$$

$$= s_0 + \frac{1}{8} \frac{L^2}{a^3} \frac{\Delta x^2(\sigma)}{\lambda \alpha} \frac{U_W^2}{U_B^3}$$

$$= s_0 + \alpha U_W^2$$

V-2 Bemerkung

Dieselben Koeffizienten ϱ und $\varkappa$ können auch zur Beschreibung der Abhängigkeit des Streifenabstandes $s_0(U_W)$ von der Wien-Spannung benutzt werden, und zwar impliziert (4-36) die Beziehung

$$\frac{1}{s_0(U_W)} = \frac{2a}{\ell L} U_B \left(\varrho_0 + \varkappa U_W^2\right) \quad . \tag{4-37}$$

Im Prinzip könnten die Koeffizienten ϱ_0 und $\varkappa$ also statt durch Messung der Streifenempfindlichkeit $\varrho(U_W)$ auch durch Messung des Streifenabstandes $s_0(U_W)$ in Abhängigkeit von U_W ermittelt werden.

2. Messung der Streifenempfindlichkeit

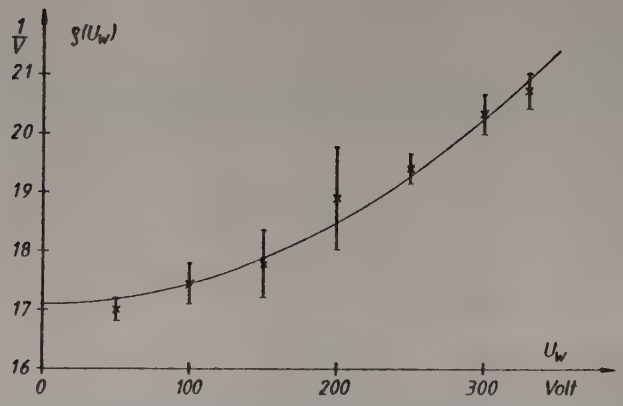
Die Wien-Spannung U_W wird grob eingestellt und das Wien-Filter abgeglichen. Dann wird die Spannung U_W um den Wert ΔU_W verändert. Der jetzt nicht mehr kompensierte elektrische Feldanteil verschiebt das Interferenzfeld. Die Verschiebung kann in den kleinen Intervallen ΔU_W so langsam erfolgen, daß die Zahl Δn der Streifen, die dabei durch den Beobachtungspunkt wandern, gezählt werden kann. Mit Variation der Wien-Spannung erhält man so eine Reihe von Meßpaaren

$$\left(U_W, \varrho(U_W)\right) \tag{4-38}$$

D.h. man kann den Zusammenhang (4-36) punktweise vermessen.

Die so aus der Messung gewonnenen Meßpaare werden mit Hilfe einer Regressionsrechnung durch eine Parabel 2. Ordnung angenähert. Die Rechnung liefert die Parameter ϱ_0 und $\varkappa$, womit der Zusammenhang (4-36) bekannt ist.

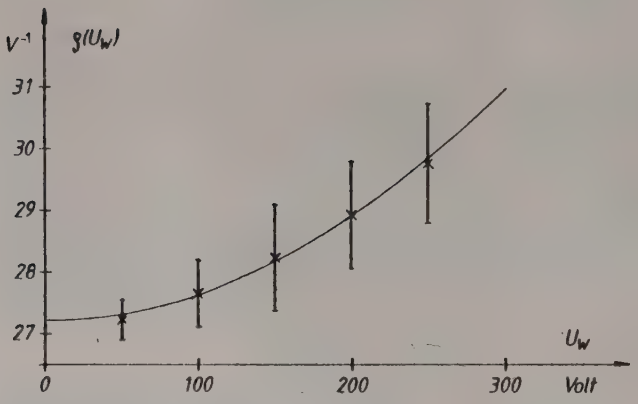
Die Fig. V/1 zeigt für zwei verschiedene Einstellungen des Interferometers gemessene Parabeln.



Einstellung des Interferometers wie Meß-Tabelle B, 1. Messung

Ergebnis der Regressionsrechnung : $S_o = (17{,}1 \pm 0{,}1)\ V^{-1}$

$\alpha = (3{,}5 \pm 1)\ 10^{-5}\ V^{-3}$



Einstellung des Interferometers wie Meß-Tabelle B, 4. Messung

Ergebnis der Regressionsrechnung : $S_o = (27{,}3 \pm 0{,}1)\ V^{-1}$

$\alpha = (4{,}2 \pm 1)\ 10^{-5}\ V^{-3}$

Fig.: V/1 Streifenempfindlichkeit S als Funktion der Wien-Spannung U_W

Die Meßpunkte $(S(U_W), U_W)$ wurden mit einer Regressionsrechnung durch die Parabel $S(U_W) = S_o + \alpha U_W^2$ (4-36) angenähert.

V-2

3. Meßprobleme, Fehlerabschätzung

Der feinregulierte Spannungsbereich beträgt nur einige Volt, was einer Streifenzahl Δn von etwa 40 entspricht. Die Spannungsänderung muß also auf einige Millivolt genau bestimmt werden. Dies geschah mit Hilfe einer Meßbrücke mit einer zusätzlichen gleichartigen Spannungsquelle.

Die statistischen Schwankungen waren so groß, daß jede Messung für ein Wertepaar mindestens 20 mal wiederholt werden mußte. Der mittlere quadratische Fehler jeder Messung ist als Fehlerbalken in die Diagramme V/1 eingetragen.

Die Fehlererwartung für den aus der Wien-Spannung U_{WK} mit dem Ausdruck (4-11) berechneten Paketabstand Δy ist nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet. Mit den in Fig. V/1 für ϱ_0 und $\varkappa$ angegebenen Fehlern ergibt sich bei einem angenommenen Meßfehler für U_W von $\pm$ 0,5 V eine Fehlererwartung für Δy_{max}:

1. Messung Tabelle D: 3,7 %
2. Messung Tabelle D: 1,5 %

Bei dieser Meßmethode ist die Bestimmung des maximalen Paketabstandes aus der Wien-Spannung also wesentlich genauer als bei der Bestimmung aus den geometrischen Abmessungen in V-1.

Auch hier wird die Spannung U_{WK} über die subjektive Beurteilung des Kontrastes bestimmt, was einen zusätzlichen Fehler von mindestens 10 % verursacht.

D.h. die Bestimmung der Kohärenzlänge über diese Methode ist mit einem Gesamtfehler von 15 % behaftet.

4. Erläuterungen zur Meßtabelle D:

Über die Messung der Streifenempfindlichkeit wurden zwei Messungen aus V-1 überprüft. Es sind dies die 1. und die 4. Messung der Tabelle B.

In der Tabelle D sind zunächst die Werte für U_F und U_{WK} aufgeführt, die mit denen in der Tabelle B übereinstimmen. Im weiteren sind die Werte für ϱ_0 und $\varkappa$ eingetragen, wie sie aus den Diagrammen der Fig. V/1 zu entnehmen sind.

Die Kohärenzlänge Δy_{max} ergibt sich wieder mit ϱ_0 und $\varkappa$ aus (4-11).

Der untere Teil der Tabelle wiederholt zum Vergleich die Meßergebnisse aus der Tabelle B.

Der Vergleich der Meßergebnisse nach der Tabelle B zeigt eine im Rahmen der gegebenen Fehlererwartungen Übereinstimmung der beiden Meßmethoden.

M E S S T A B E L L E - D -

Beschleunigungs - Spannung	U_B = 5o25 V
Wellenlänge	λ = .173 Å

Nummer der Messung			1.	2.
Faden - Spannung	U_F	V	.67	1.18
maximale Wien - Spannung	U_{WK}	V	423	313
Parameter der Steifen -	$\varkappa$	$10^5 V^{-3}$	3.48	4.17
empfindlichkeit : $\rho = \rho_0 + \varkappa U_W^2$	ρ_0	V^{-1}	17.1	27.3
Kohärenzlänge	Δy_{max}	µm	.171	.17o

Zum Vergleich : Messwerte aus Tabelle -B-			B/1.	B/4.
Kohärenzlänge	Δy_{max}	µm	.11	.15

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird ein experimenteller Aufbau beschrieben, der es gestattet, die Wirkung eines Wien-Filters auf den Strahlengang eines Zweistrahl-Interferometers zu untersuchen.

Die Anspannung des Filters, d.h. das Verhältnis von Feldstärke und Elektronengeschwindigkeit ist bei der hier beschriebenen Anwendung etwa um den Faktor 50 geringer als bei der üblichen Anwendung als Energieanalysator. Die optische Wirkung eines so schwach angespannten Filters ist deshalb in der vorliegenden Literatur nicht behandelt. Deswegen werden einige Aspekte der Optik des Wien-Filters untersucht und bei den Messungen der Kohärenzlänge berücksichtigt.

Es wird gezeigt, daß der chromatische Fehler besonders der Linse L_{II} die Kohärenzlänge vor dem Wien-Filter verkürzt. Es wird jedoch gleichzeitig nachgewiesen, daß mit dem hier verwendeten Meßverfahren trotzdem die ursprüngliche, durch die Linsen unbeeinflußte Kohärenzlänge gemessen werden kann.

Die Wirkung des Wien-Filters bei zunehmender Anspannung, den Kontrast des Interferenzfeldes zu schwächen, wird fotographisch dokumentiert.

Im weiteren wird dieser Effekt von zwei Ansätzen her diskutiert. Das gemeinsame Ergebnis ist der quantitative Zusammenhang zwischen der Anspannung des Wien-Filters und des erzeugten "Paketabstandes". Zur Messung der Kohärenzlänge werden zwei Meßmethoden verwendet.

Bei der ersten Methode müssen insgesamt 12 Parameter des Interferometers bestimmt werden, bevor die Kohärenzlänge gemessen werden kann. Die Bestimmung dieser Parameter ist zum Teil recht ungenau. Aus diesem Grunde liegt die Fehlererwartung für diese Methode bei etwa 30 %.

Die zweite Meßmethode umgeht diese Schwierigkeit durch die Messung der Streifenempfindlichkeit des Wien-Filters. Die Fehlererwartung sinkt bei dieser Methode auf weniger als 5 %.

Bei beiden Meßmethoden wird die Kohärenzlänge aus derjenigen Anspannung des Wien-Filters berechnet, bei der der Kontrast des Interferenzfeldes verschwindet. Das Verschwinden des Kontrastes muß bisher subjektiv beurteilt werden, was für beide Meßmethoden einen zusätzlichen Fehler (je nach Ausgangskontrast des Interferenzfeldes) von mindestens 10 % verursacht.

Die im Mittel gemessene Kohärenzlänge liegt bei 0,13 μm. Die Streuung der Meßwerte beträgt 0,02 μm.

Eine wesentliche Verbesserung der Genauigkeit der Meßverfahren ist zu erwarten, wenn die subjektive Beurteilung des Interferenzkontrastes durch ein objektives Meßverfahren ersetzt wird. Dann wäre es auch möglich, nicht nur den Nullpunkt des Kontrastes genauer zu bestimmen, sondern den Kontrastverlauf des gesamten Interferenzfeldes als Funktion der Interferenzordnung auszumessen.

Da dieser Kontrastverlauf die Fourier-Transformierte des Energiespektrums der Elektronen darstellt, wäre damit die Messung dieses Energiespektrums möglich. Bisher war dieses als Fourier-Spektroskopie bekannte Verfahren mit Elektronen nicht möglich, da zum Ausmessen der Kontrastfunktion der sichtbare Teil des Interferenzfeldes zu klein oder die erzeugte Wegdifferenz zu gering war. Da das Wien-Filter den Kontrastverlauf des gesamten Interferenzfeldes zugänglich macht, dürfte bei entsprechender Weiterentwicklung des hier beschriebenen Experimentes diese Fourier-Spektroskopie mit Elektronen möglich werden.

Ich habe mich zu bedanken bei

Dr. Franz Hasselbach für die Einführung in die Methoden wissenschaftlichen Arbeitens und die ständige Bereitschaft bei der Lösung von Problemen zu helfen;

Prof. Möllenstedt für die energiegeladene Förderung meiner Dissertation;

Prof. Lenz für die theoretische Untermauerung meiner Experimente und die konstruktive Durchsicht dieser Arbeit;

Herrn Köhler, Leiter der Institutswerkstätten, der mir nicht nur bei mechanischen Problemen ein nach Qualität strebender Helfer war;

Dr. Lichte für seine Bereitschaft zur Diskussion;

Dr. Wahl für einige wichtige theoretische Anregungen;

meiner Frau für das geduldige, sorgfältige Tippen der vorliegenden Arbeit.

LITERATUR

Andersen, W.H.J. and Poole, J.B., J. of Phys. E: Sci. Instrum., 3, 121, (1970)

Boersch, H., Geiger, J. und Hellwig, H., Phys. Lett., 3, (1962)

Boersch, H., Geiger, J. und Stickel, W., Z. Physik, 180, 451, (1964)

Braun, K.J., Diplomarbeit, Inst. f. Angew. Physik Tübingen (1972)

Curtis, G.H. and Silcox, J., Rev. Sci. Instrum., 42, 630, (1970)

Düker, H., Z. Naturforschung, 10, 256, (1955)

Faget, J., Interférences des ondes électroniques. Application à une méthode de microscopie électronique interférentielle. Thèse, Toulouse 1961. Editions de la Revue d'Optique théorique et instrumentale No. 180

Glaser, W., Z. Physik 80, 451, (1933)

Heise, F. und Rang, O., Optik, 5, 201, (1948)

Herzog, R., Z. Physik, 89, 447, (1934)

Kazan, B., "Advances in IMAGE PICKUP AND DISPLAY", Volume 1, Verlag: Academic Press New York 1974

Kasper, E. und Lenz, F., Z. Ang. Phys. 20, 177, (1966)

Keller, M., Z. Physik, 164, 292, (1961)

Legler, W., Z. Physik, 171, 424, (1963)

Möllenstedt, G. und Düker, H., Z. Physik, 145, 377, (1956)

Möllenstedt, G., Wohland, G., Electron Microscopy, Proceedings of the Seventh European Congress on Electron Microscopy 1, 28, (1980)

Ogilvie, K.W., Kittredge, R.J. and Wolkerson, T.D., Rev. Sci. Instrum., 39, 459, (1968)

Wohland, G., Diplomarbeit, Institut für Angewandte Physik, Tübingen (1977)

Lebenslauf

	Name: Gerhard Richard Wohland
3.10.46	geboren in Plochingen
	Eltern: Richard Wohland, Ingenieur
	Helene, geb. Schmögner, Lehrerin
1953-58	Grundschule in Baden-Württemberg
1958-67	Gymnasium in Waiblingen und Schorndorf
20.6.67	Abitur
6.10.67	Studienbeginn an der Universität Stuttgart
9.10.70	Vordiplom in Physik in Tübingen
1974-77	Diplomarbeit am Institut für Angewandte Physik in Tübingen: "Erprobung eines Bildverstärkers an einem Biprisma Interferometer für Elektronen" Anleitung: Prof. Möllenstedt
30.9.77	Diplomprüfung in Physik; Nebenfach: Mathematik
17.3.78	Eheschließung mit Iris van Raaij
24.8.78	Geburt Sohn Max David
1978-81	Dissertation am Institut für Angewandte Physik in Tübingen: "Messung der Kohärenzlänge von Elektronen im Elektroneninterferometer mit Wien-Filter" Anleitung: Prof. Möllenstedt

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten:
Baumann, Betten, Betsch, Breitling, Dachs, Dudenhausen, Gaukler, Gönnenwein, Kasper, Krüger, Lenz, Mack, Mitter, Möllenstedt, Mühleisen, Müller, Nagel, Pfister, Prieß, Radbruch, Rieke, Rüdorff, Salzmann, Schäfer, Schief, Schmid, Sohr, Sommer, Speidel, Staudt, Strambach, Stumpf, Wolf, Wildermuth.